

**УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЭКРАНОПЛАНА: ЛИНЕЙНЫЕ
ОЦЕНКИ И НЕЛИНЕЙНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Санкт-Петербургский государственный университет сервиса и экономики

This work is devoted to the problem of comparison linear and nonlinear mathematical models in a wing-in-ground effect craft flight dynamics.

Keywords: WIG-craft, flight dynamics, linear, nonlinear mathematical models.

Эта работа о сопоставлении результатов расчетов возмущенного движения экраноплана на основе линейной и нелинейной моделей динамики полета.

Ключевые слова: экраноплан, механика полета, линейное и нелинейное моделирование, возмущенное движение.

Сложность проблем аэродинамики и динамики полета экраноплана во многом обусловлена нелинейным характером эффекта близости экрана, что проявляется в нелинейных зависимостях аэродинамических характеристик экраноплана от параметров его движения, и, прежде всего, от высоты полета, [1], [2]. Все это обуславливает сложные зависимости динамических свойств экраноплана от кинематических параметров: угла тангажа ϑ и высоты полета H . Указанные особенности динамики экраноплана в полной мере проявляются при его движении в вертикальной плоскости, вследствие чего приведенные далее результаты относятся к продольному движению экраноплана.

Поскольку экраноплан как динамическая система обладает нелинейными свойствами, в исследованиях механики полета экраноплана можно применять подход теории нелинейных колебаний. В продольном движении с постоянной поступательной скоростью экраноплан представляет собой динамический объект с двумя степенями свободы. Система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая его движение, в общем случае имеет вид:

$$d^2H/dt^2 + C_h dH/dt = f_h(h, \vartheta), \quad d^2\vartheta/dt^2 + C_\vartheta d\vartheta/dt = f_\vartheta(h, \vartheta), \quad (1)$$

где t - время, C_h , C_ϑ - коэффициенты, характеризующие демпфирование колебаний экраноплана по высоте полета H и углу тангажа ϑ , $f_h(h, \vartheta)$, $f_\vartheta(h, \vartheta)$ - нелинейные функции аэродинамических характеристик экраноплана, h - расстояние от задней кромки крыла экраноплана до опорной поверхности. Установившийся режим полета (H_0, ϑ_0) задает система нелинейных уравнений: $f_h(h_0, \vartheta_0) = 0$, $f_\vartheta(h_0, \vartheta_0) = 0$, и выполнение этих равенств означает равенство нулю сумм всех сил и всех моментов, действующих на экраноплан.

Траектория движения экраноплана определяется решениями системы нелинейных дифференциальных уравнений (1): $H = H(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$. Поведение интегральных кривых $H = H(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$ вблизи положения равновесия (h_0, ϑ_0) описывается получаемой путем линеаризации системы (1) системой линейных дифференциальных уравнений относительно приращений высоты полета ΔH и угла тангажа $\Delta \vartheta$. В безразмерной форме эта система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{H}'' &= c_1 \Delta \bar{H}' + c_2 \Delta \bar{H} + c_3 \Delta \vartheta' + c_4 \Delta \vartheta + \Delta C \\ \Delta \vartheta'' &= m_1 \Delta \bar{H}' + m_2 \Delta \bar{H} + m_3 \Delta \vartheta' + m_4 \Delta \vartheta + \Delta m \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь обозначено: $\Delta \bar{H} = \Delta H / C$, где C - хорда крыла;

c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , m_1 , m_2 , m_3 , m_4 - параметры, содержащие производные коэффициентов подъемной силы C_L и продольного момента C_m по углу тангажа, высоте полета, угловой и вертикальной скоростям. «Штрих» означает дифференцирование по безразмерному времени; ΔC и Δm - приращения подъемной силы и продольного момента из-за действия внешних возмущений. Системе (2) соответствует характеристическое уравнение четвертого порядка:

$$\lambda^4 + B_1 \lambda^3 + B_2 \lambda^2 + B_3 \lambda + B_4 = 0. \quad (3)$$

Обозначим его корни:

$$\lambda_{1,2} = \Xi \pm i \Omega, \quad \lambda_{3,4} = \xi \pm i \omega, \quad (i^2 = -1), \quad (4)$$

Обычно $\Omega \neq 0$, а ω может обращаться в нуль. Если $\omega = 0$, то в (4) $\lambda_{3,4} = \xi_{3,4}$.

Корни $\lambda_{1,2}$ характеристического уравнения (3) отвечают компоненте движения экраноплана, существующей при полете на любой высоте, в том числе и на большой, в отсутствие эффекта влияния экрана. В последнем случае корни $\lambda_{1,2}$ соответствуют так называемому короткопериодическому движению экраноплана как обычного самолета. В свою очередь, корни $\lambda_{3,4}$ возникают при наличии эффекта экрана. Величина Ξ всегда отрицательна, а ξ может иметь любой знак. Если ξ отрицательно, то движение экраноплана устойчиво «в малом» т.е. при малых возмущениях, в противном случае имеет место колебательная (при $\omega \neq 0$) или апериодическая ($\omega = 0$) неустойчивость. При больших возмущениях движение экраноплана как нелинейной динамической системы определяется уравнениями (1). При этом для решения вопроса о наличии неустойчивости достаточно исследовать устойчивость решений системы (2), т.к. из факта неустойчивости решений линейной системы следует неустойчивость решений и системы нелинейных уравнений (1). Что же касается устойчивости, то, поскольку решения систем уравнений (1) и (2) близки между собой лишь в течение малого интервала времени, то утверждать, что движение экраноплана устойчиво «в целом», при воздействии больших возмущений только на основе линейных оценок, не следует. Можно лишь сказать, что устойчивость «в малом» является необходимым, но не достаточным условием устойчивости движения экраноплана «в целом».

Специфика динамики полета экраноплана вблизи опорной поверхности состоит в том, что он как нелинейная динамическая система обладает свойством одночастотности. Это проявляется в том, что свободное возмущенное движение экраноплана является периодическим с периодом, длительность которого зависит от высоты полета. В результате траектория движения экраноплана представляет собой кривую, похожую на синусоиду. Причина данного феномена - в существенной разнице между парами корней $\lambda_{1,2}$ и $\lambda_{3,4}$: поскольку величина $|\Xi|$ обычно велика, то компонента движения, соответствующая паре корней $\lambda_{1,2}$, быстро затухает. На этом фоне компонента

движения, отвечающая паре корней $\lambda_{3,4}$, затухающая значительно медленнее, т.к. $|\xi| \ll |\Xi|$, проявляет себя в качестве доминирующей, и определяет характер движения и устойчивость экраноплана при полете вблизи экрана.

Исследуя (3), можно получить приближенные оценки корней $\lambda_{3,4}$ в критически важных случаях движения экраноплана: близких неустойчивым. Этому соответствуют либо малая величина вещественной части комплексно-сопряженных корней $\lambda_{3,4}$: $|\xi| \ll 1$, либо малый по абсолютной величине один или оба корня $\lambda_{3,4}$: $|\lambda_{3,4}| \ll 1$, причем в этом случае они вещественные. Критическим случаям соответствуют две границы области устойчивости. Одна из них - это граница колебательной устойчивости (при $\xi = 0, \omega \neq 0$), а другая - граница аperiodической устойчивости ($\xi = \omega = 0$). В последнем случае будет равен нулю коэффициент B_4 , а на границе аperiodической устойчивости - алгебраический критерий устойчивости $L_B = B_1 B_2 B_3 - B_1^2 B_4 - B_3^2$.

Линейные оценки для корней характеристического уравнения (3) нетрудно получить, рассмотрев формулы Виета для коэффициентов этого уравнения:

$$B_1 = A + a, \quad B_2 = R^2 + r^2 + Aa, \quad B_3 = aR^2 + Ar^2, \quad B_4 = R^2 r^2, \quad (5)$$

где обозначено: $A = -(\lambda_1 + \lambda_2)$, $a = -(\lambda_3 + \lambda_4)$, $R^2 = \lambda_1 \lambda_2$, $r^2 = \lambda_3 \lambda_4$.

Подставляя в третью формулу (5) величины A , R^2 и r^2 , выраженные последовательно из первой, второй и четвертой формул (5), получим алгебраическое уравнение относительно параметра «а» следующего вида:

$$a^6 + b_1 a^5 + b_2 a^4 + b_3 a^3 + b_4 a^2 + b_5 a + b_6 = 0, \quad (6)$$

где: $b_6 = L_B$ и $b_5 = -B_1 (B_2^2 + B_1 B_3 - 4B_4)$.

Пренебрегая в уравнении (6) членами со степенями «а» выше первой, получим: $a = -b_6 / b_5 = L_B / B_1 (B_2^2 + B_1 B_3 - 4B_4)$.

Тогда, при $|\xi| \ll 1$ и $B_4 > 0$, поскольку $\xi = -a / 2$, имеем:

$$\xi = -L_B / 2B_1 (B_2^2 + B_1 B_3 - 4B_4), \quad \omega^2 = B_4 / B_2 - \xi^2.$$

При $B_4 < 0$, когда корни $\lambda_{3,4}$ вещественны, получаем приближенную оценку:

$$\lambda_{3,4} = \xi \pm \sqrt{\xi^2 - B_4 / B_2}, \quad \text{где, по-прежнему, } \xi = -a / 2.$$

При малом B_4 , т.е. при $|\lambda_3 \lambda_4| \ll 1$, непосредственно из уравнения (3):

$$\lambda_3 = b - \sqrt{b^2 - B_3 / B_1}, \quad \lambda_4 = B_4 / (B_2 - B_1 \lambda_3) \lambda_3, \quad \text{где: } b = B_2 / 2B_1.$$

Полученные приближенные формулы пригодны для использования при изменении наименьшего из корней $\lambda_{3,4}$ (или же их вещественной части) по абсолютной величине в диапазоне от нуля до 0.1 - 0.15.

Линейное приближение, выявляя тенденции развития переходных процессов в возмущенном движении экраноплана, не позволяет проследить развертывание переходных процессов в целом, на больших интервалах времени. Для этого необходимо обратиться к исходной системе нелинейных дифференциальных уравнений движения экраноплана (1), причем присущее экраноплану свойство одночастотности позволяет провести аналогию между экранопланом и некоторой другой механической колебательной системой с одной степенью свободы и имеющей похожую нелинейную характеристику восстанавливающей силы. Тогда в качестве модели рассмотрим движение системы с зависимостью восстанавливающей силы от величины перемещения h в виде функции c/h . Подобные несимметричные нелинейные характеристики упругости имеют конические пружины и резиновые или пневматические амортизаторы. Соответствующее модельное дифференциальное уравнение, позволяющее проиллюстрировать основные особенности динамических процессов, характерных также и для экраноплана, имеет следующий вид:

$$d^2h/dt^2 + q dh/dt - c/h = G. \quad (7)$$

Уравнение (7) не интегрируется в квадратурах, но может быть решено приближенно, и исследовано аналитически, разложив в ряд Тейлора функцию $f(h)=c/h$ в окрестности точки равновесия $h=h_0$. Приближенное решение уравнения (7) при сохранении в упомянутом разложении членов ряда степени параметра h не выше первой дает, как и следовало ожидать, синусоидальный во времени процесс колебаний. Учет влияния члена ряда со второй степенью h порождает периодическое решение $h=h(t)$, где период колебаний зависит от амплитуды, а размах не вполне пропорционален величине первоначального

импульса, вызывающего возмущенное движение рассматриваемой механической системы, что характерно для процессов нелинейных колебаний. Несимметричность (односторонняя жесткость) нелинейной характеристики упругости приводит к непропорциональности реакций динамической системы на величину внешнего возмущения и к ее зависимости от вида возмущающего воздействия. Для экраноплана это имеет важное практическое значение, и результаты нелинейного моделирования возмущенного движения могут заметно расходиться с оценками в линейном приближении. С целью выявления различий такого рода были выполнены исследования, в ходе которых система дифференциальных уравнений (1) интегрирования методом Рунге-Кутты. Некоторые результаты выполненных расчетов приведены на рис. 1, 2, 3 в виде графиков изменения величин относительной высоты полета $\bar{H} = H/C$ и угла тангажа ϑ в зависимости от относительного времени t/t_0 , где t_0 - период короткопериодического движения экраноплана при полете на большой высоте. В качестве возмущающих воздействий были приняты: первоначальное приращение величины угла тангажа $\Delta\vartheta = 2^\circ$ по сравнению с исходным его значением, ступенчатая перекладка руля высоты $\Delta\delta_e = 3^\circ$ на кабрирование и ступенчатый встречный порыв горизонтальной скорости ветра $W = 0.1V_0$. Для оценки влияния на динамику движения нелинейности аэродинамических характеристик экраноплана расчеты переходных процессов выполнялись в двух вариантах: а) - нелинейном и б) - линейном.

Анализ результатов расчетов показал, что при существенных различиях в целом характера переходных процессов в зависимости от того, для какого из указанных вариантов проводятся расчеты, в некоторых случаях эти различия незначительны: при малых возмущениях, в т.ч., при ступенчатом изменении угла тангажа (рис. 1). Малые различия в этом случае объясняются тем, что экраноплан в полете на режимах с малыми углами тангажа ведет себя по отношению к переменной ϑ как динамическая система, близкая к линейной.

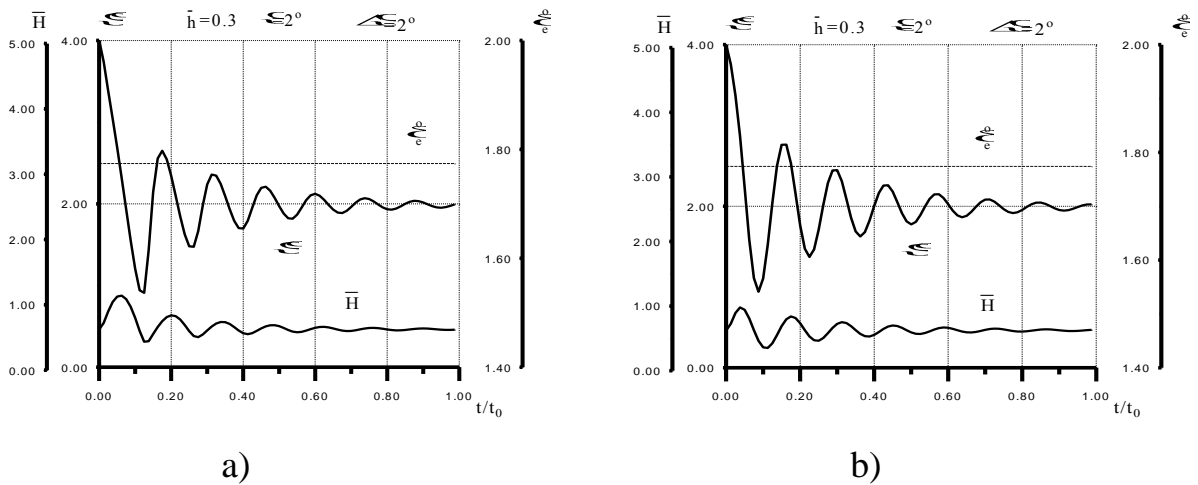


Рис. 1 Возмущенное движение экраноплана при отклонении угла тангажа от равновесного значения: *a) нелинейная модель, b) линейное приближение.*

Заметные количественные и качественные различия между результатами нелинейного и линейного моделирования наблюдаются при исследовании воздействия на экраноплан порывов ветра (рис. 2). Это объясняется тем, что действие встречного порыва ветра, равного 10% величины поступательной скорости экраноплана, увеличивает высоту его полета, с изменением которой связаны нелинейные свойства аэродинамических характеристик экраноплана.

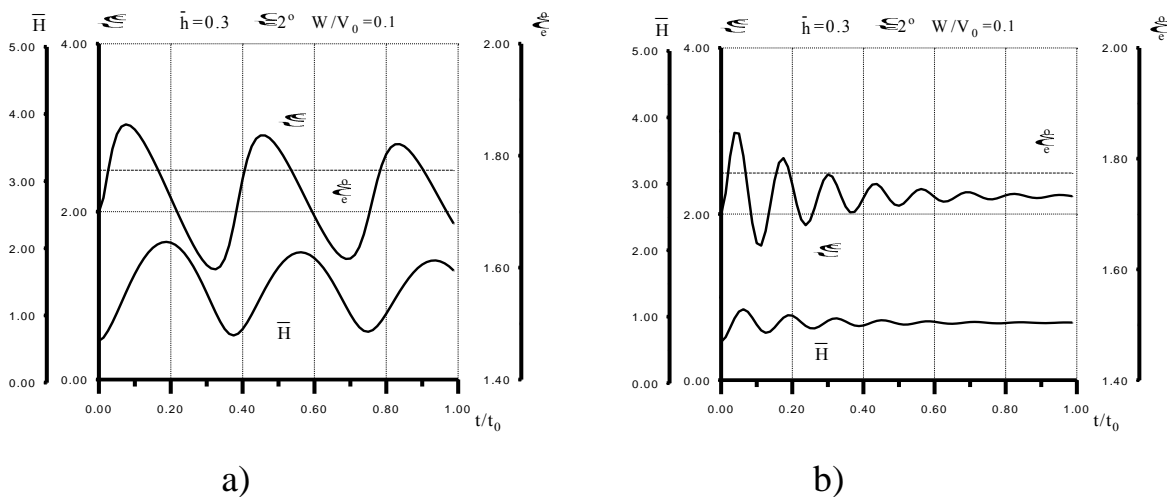


Рис. 2 Возмущенное движение экраноплана при воздействии встречного горизонтального порыва ветра: *a) нелинейная модель, b) линейная модель.*

Аналогично реагирует экраноплан на ступенчатую перекладку руля высоты на кабрирование (рис. 3): экраноплан увеличивает высоту полета, вследствие чего вновь проявляются различия в результатах расчетов по нелинейному и линейному алгоритмам. При этом устойчивость «в малом» не гарантирует устойчивости движения экраноплана «в целом».

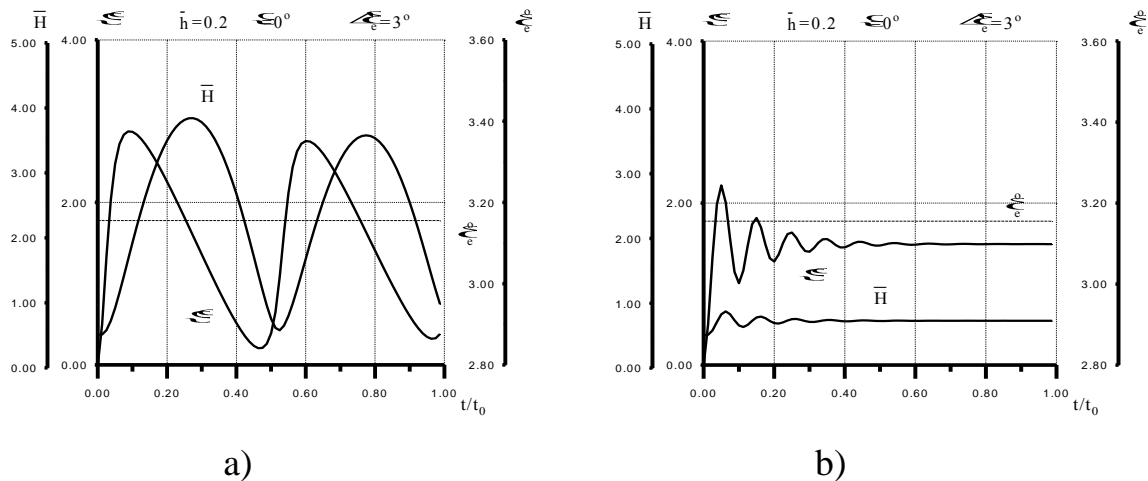


Рис. 3 Возмущенное движение экраноплана при ступенчатой перекладке руля высоты на кабрирование: *а) нелинейная модель, б) линейная модель.*

Выводы. Анализ результатов математического моделирования полета экраноплана при нелинейном и линейном вариантах алгоритмов позволяет заключить, что надежные оценки динамических качеств экраноплана могут быть получены при сочетании линейных аналитических методов и численного нелинейного математического моделирования.

Литература:

1. Жуков В.И. Особенности аэродинамики, устойчивости и управляемости экраноплана. - М.: Изд. ЦАГИ им. проф. Н.Е.Жуковского, 1997.
2. Маскалик А.И., Колызаев Б.А., Жуков В.И. и др. Экранопланы. Особенности теории и проектирования. - СПб.: Судостроение, 2000.