УДК 517.53

MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NON-UNIFORM DOMAIN IN THE CASE OF N UNKNOWN BOUNDARIES

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОЛИСТНОЙ ОБЛАСТИ В СЛУЧАЕ N НЕИЗВЕСТНЫХ ГРАНИЦ

Sverkunova D. A. / Сверкунова Д.А.
student of the Department of the theory of the function of complex variable, Kuban state University, Krasnodar./ студент кафедры теории функции комплексного переменного, Кубанский государственный университет, Краснодар.

Аннотация. *В статье рассматривается разрешимость смешанной краевой задачи для неоднолистной области в случае n неизвестных границ.*

Ключевые слова: *аналитическая функция, неоднолистная область, замкнутый контур.*

Дана односвязная неоднолистная область D_z, внутренняя к границе ∂D, составленная из n неизвестных границ. Впишем в известные участки простые полигоны.

Пусть на каждом из известных полигонов P^i $(i=\overline{1,n}, n<\infty)$ с числом сторон m_j-1, лежащих на искомом контуре ∂D задано краевое условие

$$\Phi_i(\varphi,\psi)=0, \qquad (1.1)$$

На неизвестных же дугах $\Gamma^i(i=\overline{1,n}, n<\infty)$ заданы

$$\varphi=f_1^i(x), \psi=f_2^i(x);\ x\in\left[x_0^i,x_1^i\right] \qquad (1.2)$$

Требуется найти замкнутый контур ∂D, включающий заданные полигоны и аналитическую в области D функцию $\omega(z)=\varphi+i\psi$ удовлетворяющую условиям (1.1), (1.2).

Относительно функций $f_j^i(x)(j=1,2)$ предполагается, что они могут быть многозначными функциями своих аргументов на всем сегменте x_0^i, x_1^i или некоторых его частях. Тогда, разбивая сегмент на части, выбирая на каждом из них однозначные ветви функций $f_j^i(x)(j=1,2)$ и нумеруя концы новых сегментов в порядке обхода по неизвестной дуге Γ^i, получим, что каждый из них соответствует части искомой дуги Γ^i. Выбирая однозначные ветви таким образом, чтобы полученный контур, сохраняющих обход на полигонах P^i не имел бы точек самопересечения.

Контур l, составленный из дуг l^i $(i=\overline{1,n})$ с уравнением (1.1) и дуг l^j с уравнением (1.2), считается замкнутым и без точек самопересечения.

Дважды непрерывно дифференцируемые по аргументу функции $f_1^i(x), f_2^i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ и $\Phi_i(\varphi, \psi)$ предполагаются согласованными таким образом, чтобы направления обхода на контурах ∂D и l совпадали.

Пронумеруем полигоны и искомые дуги P^i, Γ^i $(i = \overline{1,n})$ в порядке следования их друг за другом на искомом контуре ∂D и на каждом из известных полигонов P^i зададим направление обхода. Зафиксируем положение одного из заданных полигонов, например, относительно начала координат, считая, что его концы расположены на оси OX в точках

$$z_i' \equiv x_i' \ (i = \overline{1,n};\ x_n' < 0 < x_1').$$

Нами предполагается, что задача в целом корректна, т.е. возможно соединение заданных концов.

Общее решение краевой задачи (1.2) может быть записано в виде

$$z = F(\zeta) = \int\limits_{t_n}^{\zeta} \frac{\Pi(\zeta)}{\pi i} \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{t_0^k}^{t_1^k} \frac{h_k(t)dt}{\Pi(t)(t-\zeta)} + z_n^1, \qquad (1.3)$$

$$l_k = \int\limits_{t_k^i}^{t_{k+1}^i} \left|\frac{dF}{dt}\right| dt, \qquad i = \overline{1,n}$$

Теорема об априорных оценках. Для каждых решений $\{t_2^1, \dots, t_{m_1-1}^1\}; \{t_2^2, \dots, t_{m_2-1}^2\}; \dots; \{t_2^n, \dots, t_{m_n-1}^n\}$, $t_k^i \epsilon [t_1^i, t_{m_i}^i]$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{2,\ m_\imath - 1}$, система уравнений $l_k = \int_{t_k^i}^{t_{k+1}^i} |\Pi(t)||M(t)|dt$, $k = \overline{1,\ m_\imath - 2}$, соответствующих заданной системе полигонов P^i, выполняются неравенства

$$\left|t_k^{i+1} - t_k^i\right| \geq \varepsilon > 0,$$

где ε зависит только от геометрии полигона P^i и свойств функции $h(t)$.

Литература:

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: «Наука», 1977.

2. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск: «Наука», 1977 .

3. Тлюстен С.Р. Краевые задачи со свободными границами для аналитических функций. Краснодар: Кубанский государственный университет, 1996.

References:

1. Gakhov F. D. boundary Value problems. – M.: "Science", 1977.

2. Monakhov V. N. Boundary value problems with free boundaries for elliptic systems of equations. – Novosibirsk: "Science", 1977 .

3. Tlusten S. R. boundary Value problems with free boundaries for analytic functions. Krasnodar: Kuban state University, 1996.

Abstract. *The article deals with the solvability of a mixed boundary value problem for a non-uniform domain in the case of n unknown boundaries.*

Key words: *analytical function, inhomogeneous region, closed loop.*