

**Варламов А.А., Шишлонов Е.А., Шумилин М.С., Ткач Е.Н.,**

**Гончаров Д.В.**

## **МОДЕЛИ БЕТОНА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

*Общество с ограниченной ответственностью «ТехноГарант»*

### **Введение**

Теории упругости, пластичности и ползучести – три научные направления механики твердого деформируемого тела [1]. Границы между ветвями механики твердого деформируемого тела не жесткие. В разрешающих уравнениях фигурируют одинаковые статические и идентичные геометрические уравнения. Основные предпосылки – сплошность, однородность, малые деформации, статическое нагружение. Принимаются разные физические модели материала. В задачах теории пластичности, рассматривают тело, нагруженное за предел упругих деформаций. Однако при этом игнорируют развитие деформаций во времени. Деформация изменяется только с изменением нагрузки. В теории ползучести основное внимание уделяют развитию деформаций во времени [2].

Резкой границы между упругим и упруго-пластическим состояниями обнаружить не удастся [3].

Развитие теории связано с именами С.В. Александровского, Н.Х. Арутюняна, Э.Я. Багрия, В.Я. Багрия, Н.М. Беляева, О.Я. Берга, В.В. Болотина, В.М. Бондаренко, С.В. Бондаренко, М.С. Боришанского, Н.А. Буданова, А.А. Вакуленко, П.И. Васильева, В.З. Власова, К.З. Галустова, А.А. Гвоздева, И.И. Гольденבלата, Н.Н. Давиденкова, А.Н. Динника, С.И. Дружинина, С.Н. Журкова, А.А. Ильюшина, А.Ю. Ишлинского, К.С. Карапетяна, Н.И. Катина, Л.М. Качанова, Ю.И. Кононова, А.К. Малмейстера, К.А. Мальцова, М.М. Манукяна, Н.И. Малинина, Н.Н. Малинина, Г.Н. Маслова, Р.А. Мельника, П.Ф. Милованова, Н.А. Мощанского, В.Л. НиколаеваЮ.А. Нилендера, В.В. Новожилова,

И.А. Одинг, Н.Я. Панарина, Г.С. Писаренко, С.Д. Пономарева, И.Е. Прокоповича, И.М. Рабиновича, Ю.Н. Работнова, Х.А. Рахматулина, П.А. Ребиндера, А.Р. Ржаницына, М.И. Розовского, А.В. Саталкина, С.В. Серенсена, В.В. Соколовского, Я.В. Столярова, Н.С. Стрелецкого, Г.В. Ужика, И.И. Улицкого, В.И. Федосьева, С.Е. Фрайфельда, Я.Б. Фридмана, В.Д. Харлаба, З.Н. Цилосани, А.Е. Шейкина, Н.П. Щапова, А.В. Яшина из иностранных: П. Бриджмена, О. Вагнера, С.З. Вулсона, В.Г. Гленвилла, Ли Гуан-цзуна, Ф. Дишингера, Р. Дрюона, Р.Э. Дэвиса, Х.Э. Дэвиса, Р. Лермита, Дж. Люблинера, Д. Макгенри, А.М. Невилля, Р. Ролла, Дж.Л. Сакмана, Г.А. Тетерса, Дж. Трокселла, В. Фойхта, Э. Фрейсине, А.М. Фрейденталя, Т. Хансена, В.К. Хатта, Чжао Цзу-у, Дж. Р. Шенка и многих других исследователей.

Рассматривается элементарный объем  $dx dy dz$ , нагруженный по поверхности напряжениями  $\sigma_{ij}$ , как некоторый «черный ящик» на вход которого подаются напряжения  $\sigma_{ij}$ , а на выходе снимаются деформации  $\varepsilon_{ij}$ . Для простоты систему считают замкнутой при введении в систему параметров температуры  $T$ . Тогда бесконечно малые приращения выходных величин могут быть записаны через соответствующие приращения  $d_{mn}, dt, dT$  в следующем виде

$$d\varepsilon_{ij} = A_{ijmn} d\sigma_{mn} + B_{ij} dt + C_{ij} dT \quad (t - \text{время}). \quad (1)$$

Здесь  $A_{ijmn}, B_{ij}, C_{ij}$  - некоторые функционалы от параметров  $\varepsilon_{ij}(x, y, z, t), \sigma_{ij}(x, y, z, t), T(x, y, z, t)$  в области, занятой телом.

Принимается гипотеза «близкодействия» - параметры произвольно взятого элементарного объема, не зависят от состояния в любом другом элементарном объеме, не учитываются объемные силы (инерционные, гравитационные). Функционалы в последнем уравнении в этом случае вырождаются в функционалы только по  $t$ .

Реологические модели для систем с близкодействием делят на градиентные и безградиентные. В последнем случае в определяющие уравнения производные по  $x, y, z$  от  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, T$  не входят. Большинство моделей, применяемые в механике, являются безградиентными.

Если функционалы  $A_{ijmn}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  «неинвариантны» относительно сдвига во времени, то соответствующие системы называют системами «со старением». Н.Х. Арутюнян изучал такие системы применительно к ползучести бетона. Большая часть реологических моделей инвариантна относительно времени.

Реакция системы на внешнее воздействие может быть мгновенной и с последствием. Если с течением времени внешнее возмущение исчезает, то реакция системы тоже может исчезнуть (обратимая реакция – в основном определяются модели в теории упругости).

При построении классической теории упругости используют два предположения: о малости и одинаковом порядке удлинений, сдвигов и углов поворота и о возможности принятия обобщенного закона Гука, упрощение этих допущений приводит к нелинейной теории упругости.

### **1. Пластические деформации**

Под **пластичностью**, как общим свойством твердых тел, понимают способность тела испытывать деформации, не полностью исчезающие с удалением вызывающих их причин. Но чаще, в этот термин вкладывают более узкий смысл: способность к остаточным деформациям, не связанным с тепловой подвижностью вещества (*Пластическая деформация* – независящая от времени деформация, которая сохраняется после разгрузки (обычное представление в теории пластичности) [4]).

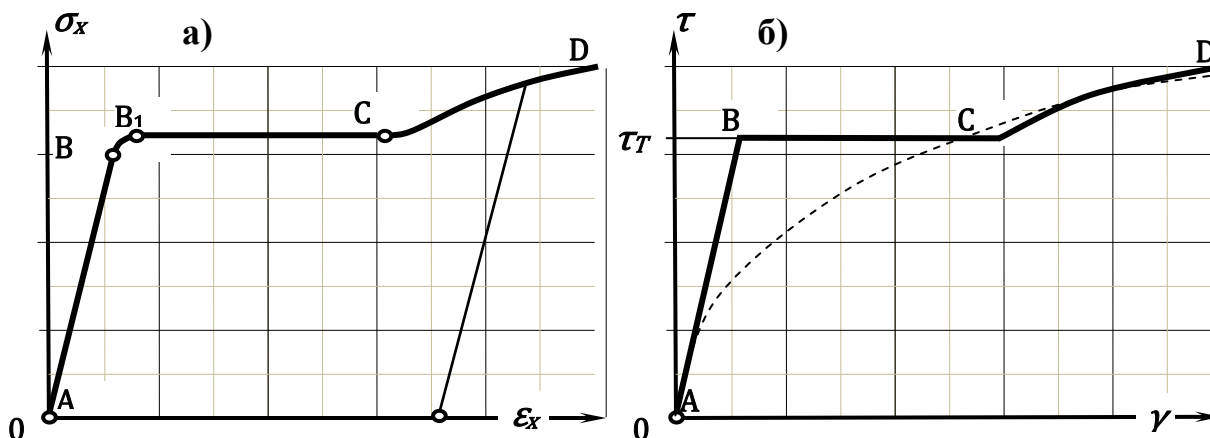
Внешне это проявляется в независимости картины процесса от времени. Для каменных материалов появление остаточной деформации (в основном при растяжении) обычно почти сразу сопровождается разрушением. Примером значительной пластичности при «холодном» деформировании при обычных значениях шаровой составляющей напряжения являются металлы. Основы теории пластичности применительно к металлам заложили А.Сен-Венан и М.Леви, А.Треска, А.Хаар и Т.Карман, Р.Мизес, Г.Генки и Л.Прандль, А.Надаи, В.Лоде, И.Д.Ивлев, В.В.Новожилов, А.М.Жуков, Ю.Н.Работнов, А.А.Ильюшин и др. Разработанные теории развивались применительно к деформированию металлов и прямое применение их к бетону затруднительно.

Задачи, в которых пластические деформации с течением времени растут, рассматриваются в теории ползучести. Более сложное поведение материалов изучает реология.

## 2. Схематизация диаграмм деформирования

Для упрощения расчетов за пределами упругости условные или действительные диаграммы деформирования, [5] схематизируют, т. е. заменяют кривыми или прямыми линиями, имеющими достаточно простое математическое выражение и в то же время хорошо совпадающими с экспериментально полученными диаграммами.

На рис.1 показаны схематизированные кривые деформации принимаемые в теории пластичности [6].



**Рис.1. Кривая одноосного растяжения (а) и схематизированная кривая (б)**

Растяжение Чистый сдвиг

Упругий участок  $AB \sigma_I = E \epsilon_I \quad \tau = G \gamma$

Участок текучести  $BC \sigma_I = const = \sigma_T \quad \tau = const = \tau_T$

Участок упрочнения  $CD \sigma_I = g_{II}(\epsilon_I) \epsilon_I \quad \tau = g(\gamma) \gamma$

На кривой деформирования (рис.1) могут отсутствовать те или иные участки. Если кривая деформации характеризуется незначительным упрочнением, ее аппроксимируют ломанной с горизонтальным участком текучести BC (соответствующие напряжения в теории пластичности называют пределом текучести  $\sigma_T$  (или  $\tau_T$ )).

Функцию  $g_{II}(\epsilon_I)$  или  $g(\gamma)$  иногда называют модулем упрочнения (секущим).

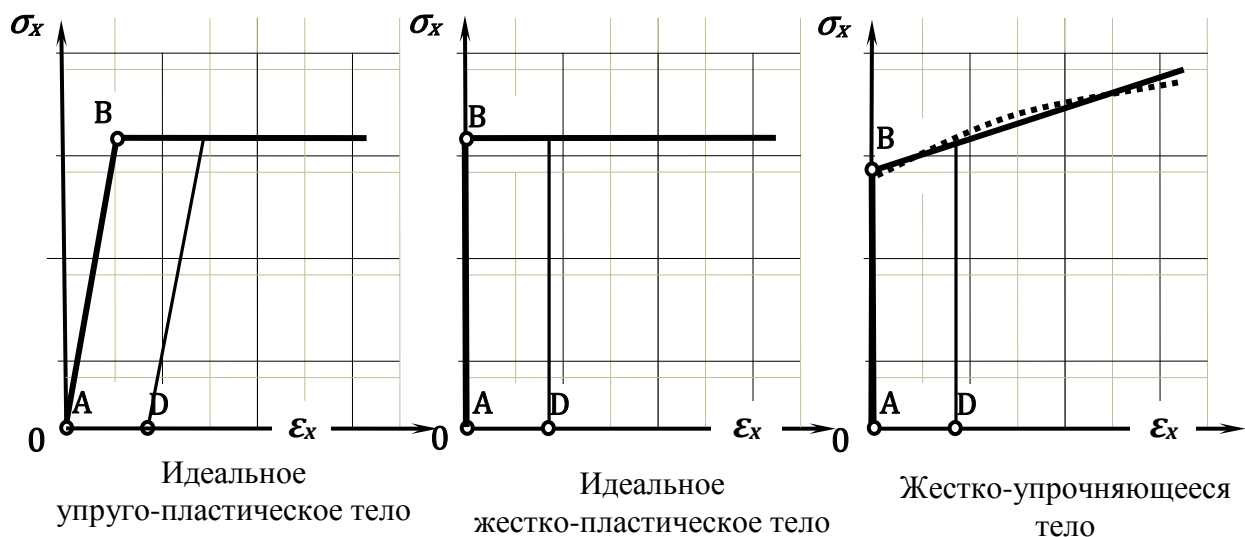
По опытным данным  $0 < g_{II}(\epsilon_I) \leq E$ ;  $0 < g(\gamma) \leq G$ .

Критерием продолжающейся пластической деформации (нагружения) является рост работы пластической деформации  $dA_p > 0$ .

Критерий разгрузки (разделение текучести и упругой деформации материала) запишется  $d\sigma_i < 0$ ; состояние упрочнения  $d\sigma_i < < 0$ . Разгрузка протекает по закону Гука.

При больших величинах интенсивностей деформаций величиной упругой деформации по сравнению с пластической можно пренебречь, или, что равносильно, принять модуль упругости равным бесконечности.

Варианты, применяемых идеализированных диаграмм деформирования билинейного тела, показаны на рис. 2.



**Рис.2. Схемы кривых деформаций, пластическое поведение**

Наиболее используемая модель Прандтля (рис.2, левый) пластические деформации возникают мгновенно (независимо от времени). Критерием текучести выступает условие пластичности Губера-Мизеса-Генки. Для ветви разгрузки применяется принцип Мазинга. Деграация свойств не учитывается [7]. Поведение (рис.2, правый) поверхности пластичности описывается законом упрочнения [8].

### 3. Первые, «простейшие», теории пластичности

Разработанные теории развивались применительно к деформированию металлов и прямое применение их к бетону затруднительно.

Для построения теории в основном применяют модели идеальных жестко-пластического и упруго-пластического тел. Фактическую неоднородность тел учитывают установлением предела текучести как функции координат. Задачи усложняются при использовании тел с линейным и нелинейным упрочнением.

### *Теория пластического течения*

Основана на следующих предположениях:

- 1) тело изотропно;
- 2) относительное изменение объема является упругой деформацией, пропорциональной среднему давлению;
- 3) компоненты полной деформации складываются из компонент упругой и пластической деформаций;
- 4) выполняется условие текучести Мизеса или условие упрочнения;
- 5) приращение компонентов пластической деформации  $d\epsilon^P_x$  пропорциональны соответствующим компонентам девиатора напряжений  $s_x$ ,

Из этих условий вытекают уравнения Прандтля-Рейса

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon &= 3kd\sigma; \\ d(\epsilon_x - \frac{1}{3}\epsilon) &= \frac{1}{2G}ds_x + d\lambda s_x; \dots; \\ d\gamma_{xz} &= \frac{1}{G}d\tau_{xz} + 2d\lambda\tau_{xz}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $k = 1 - 2\nu/E$  - коэффициент объемного сжатия;  $\nu$  - число Пуассона;

$E$  - модуль упругости;  $d\lambda$  - некоторый бесконечно малый скалярный множитель, связанный с приращением работы пластической деформации соотношением

$$dA_p = 2d\lambda\tau_i^2 . \quad (3)$$

В состоянии текучести  $\tau_i^2 = const = \tau_T^2$ , отсюда  $d\lambda = dA_p/2\tau_T^2$  и нет однозначной связи компонент пластической деформации от компонент напряжений и их приращений.

В состоянии упрочнения

$$d\lambda = F(\tau_i)d\tau_i , \quad (4)$$

где  $F(\tau_i) = \Phi'(\tau_i)/2\tau_i^2$ , и тогда уравнения (8) устанавливают однозначную связь приращений компонент деформаций от напряжений и их приращений.

Уравнения (2) применимы при  $d\tau_i > 0$ . При  $d\tau_i \leq 0$  происходит разгрузка.

*Теория пластичности Сен-Венана – Мизеса* (Жестко-пластическое тело (рис.2).

Использование уравнений (2) связано с математическими трудностями, так как они нелинейны и имеют сложную структуру. При развитых пластических деформациях можно пренебречь компонентами упругой деформации. Тогда, отбрасывая последние для состояния текучести в уравнениях (2), и, разделив обе части уравнений на дифференциал времени  $dt$ , получим:

$$\xi_x = \lambda'(\sigma_x - \sigma); \dots; \eta_{xz} = 2\lambda' \tau_{xy}, \quad (5)$$

$$\text{где множитель } \lambda' = 1/2\tau_T^2 (\sigma_x \xi_x + \sigma_y \xi_y + \dots + \tau_{xz} \eta_{xz}) \quad (6)$$

пропорционален мощности пластической деформации. Время « $t$ » введено в уравнение (6) для удобства; это может быть физическим временем или каким либо монотонно изменяющимся параметром (например, параметром внешней нагрузки).

Жестко-пластическая схема приводит к приемлемому решению, если ничего не сдерживает пластические деформации.

*Теория упруго-пластических деформаций.*

Предложена Генки и Надаи, использует конечные зависимости между компонентами напряжений и деформаций, аналогичные по структуре закону Гука. Сохраняя предположения 1...4 теории пластического течения, предположение 5 заменяется другим:

- компоненты пластических деформаций пропорциональны соответствующим компонентам девиатора напряжений.

Уравнения пластического состояния в общем случае не построены, вследствие сложности процесса пластического деформирования. Ряд предложений содержится в работах [9-17].

#### **4. Деформации ползучести**

Ползучесть – рост деформации при постоянном напряжении.

Явление ползучести в узком смысле слова состоит в том, что тело, подверженное действию постоянных нагрузок, медленно деформируется во

времени. Одна сторона этого явления - изменение во времени деформаций называется ползучестью или последействием, другая – изменение во времени напряжений - релаксацией. Последействие может быть упругим и пластическим. При упругом последействии деформации, возникшие во времени, после снятия нагрузки уменьшаются и с течением времени исчезают. При пластическом последействии деформации в основном необратимые, уменьшаются медленно и в незначительной степени.

Вопрос о необходимости учета ползучести решается в зависимости от материала, температуры нагрева и степени напряженности (например, для стали явление ползучести существенно при повышенных температурах (ориентировочно более 300° C)).

Особенностью расчетов на ползучесть является учет фактора времени, который в обычных расчетах на статическую нагрузку во внимание не принимается.

Расчеты на ползучесть в основном базируются на результатах экспериментального изучения ползучести материала при его одноосном нагружении постоянной во времени нагрузкой.

Общий вид кривой ползучести показан на рис.3. Иногда на графике изображается зависимость от времени только одной деформации ползучести  $\epsilon^c$ , тогда ось абсцисс графика расположена так, как это показано штриховой линией на рис.3.

Тангенс угла наклона касательной к линии **ABCD** с осью абсцисс выражает в масштабе скорость деформации равную скорости деформации ползучести.



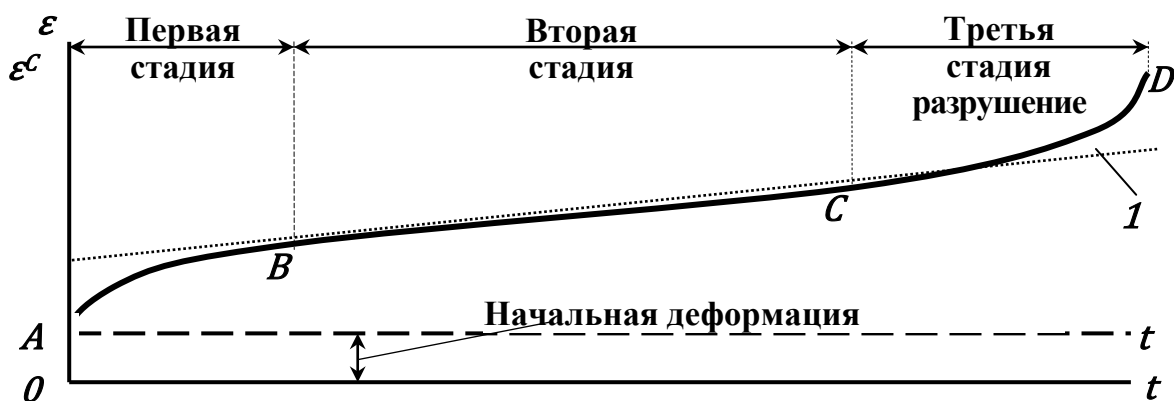


Рис.3. Кривая ползучести

$$\xi = \xi^c = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon^c}{dt}$$

Как видно из рисунка процесс ползучести можно разделить на три стадии. В первой стадии (участок  $AB$ ) скорость деформации ползучести постепенно уменьшается, что можно объяснить уменьшением скорости взаимодействия механического упрочнения и термического разупрочнения. В первой стадии преобладает механическое упрочнение, связанное с ростом деформации ползучести. Во второй стадии (участок  $BC$ ) устанавливается равновесие между механическим упрочнением и термическим разупрочнением и процесс ползучести протекает с минимальной постоянной во времени скоростью  $\xi_{min}^c$ . Если напряжения по сечению постоянны, то третьей стадии не наблюдается.

Наиболее экспериментально обоснованной является зависимость минимальной скорости деформаций ползучести от напряжения

$$\xi_{min}^c = Q(\sigma) = k\sigma^n. \quad (7)$$

Располагая серией кривых ползучести для материала при разных напряжениях и температуре можно установить значения  $k$  и  $n$ . После логарифмирования и построения прямой ползучести в логарифмических координатах получаем для двух точек:

$$\log \xi_{min1}^c = \log k + n \cdot \log \sigma_1;$$

$$\log \xi_{min2}^c = \log k + n \cdot \log \sigma_2,$$

откуда следует, с учетом [18]

$$n = \left( \log \frac{\log \xi_{min2}^C}{\log \xi_{min1}^C} \right) / \left( \log \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right); \quad k = k_1 \exp \left( -\frac{\Delta H_n}{RT} \right), \quad (8)$$

где  $k_1$  - постоянная материала;  $T$ - абсолютная температура;  $R$  - газовая постоянная;  $\Delta H_n$ - энергия активация ползучести (энергия элемента тела, превышение которой приводит к смещению элемента и деформации).

Обычно результаты экспериментального изучения ползучести обрабатывают в виде графиков (рис.4), представляющих зависимость от времени деформаций при постоянных напряжениях и температуре. Эти графики называют кривыми ползучести. Вид кривых ползучести зависит от напряжения и температуры, при которых испытывался образец.

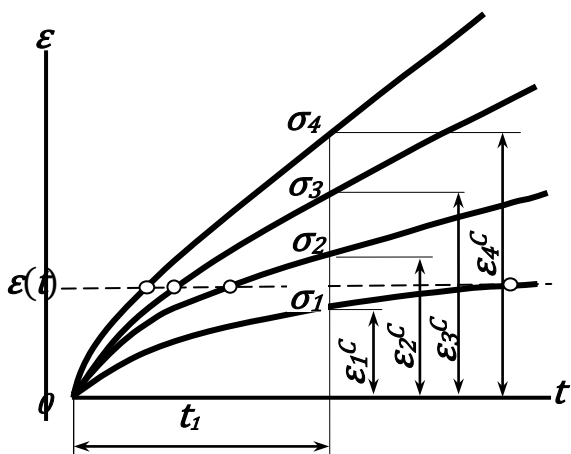


Рис.4. Семейство кривых ползучести

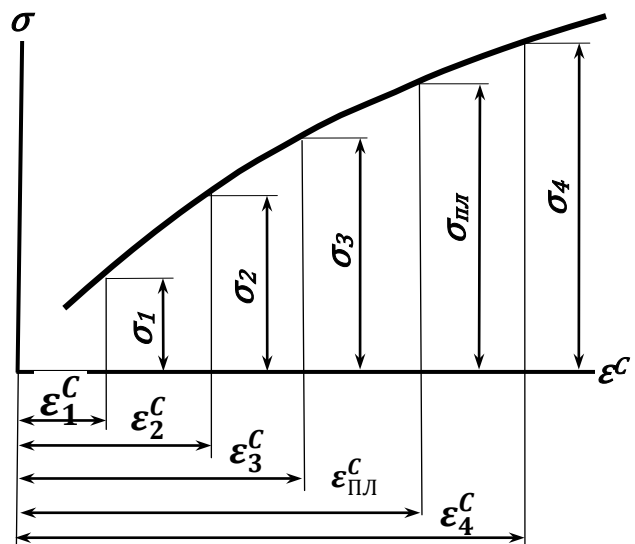


Рис.5. Зависимость «σ-ε» для фиксированного времени

На основании исследования кривых ползучести были предложены различные уравнения, отражающие первую и вторую стадии этих кривых. Различные зависимости деформации ползучести  $\epsilon^C$  от времени и напряжения при определенной температуре можно разбить на две группы.

В основу первой группы формул положена гипотеза о том, что кривые ползучести в координатах  $t, \epsilon^C$  при различных напряжениях и одной и той же температуре геометрически подобны. Это означает, что они могут быть получены из одной кривой умножением ординат ее на некоторую величину, являющуюся функцией напряжения. Следовательно, зависимость деформации

ползучести от напряжения и времени записывается, в виде произведения двух функций, из которых одна  $Q$  является функцией напряжения и температуры, а другая  $\Omega$  - функцией времени и температуры:

$$\varepsilon^c = Q\Omega \quad (9)$$

Во второй группе формул принимается, что деформация ползучести может быть представлена в виде:

$$\varepsilon^c = Q_1\psi + Q_2t, \quad (10)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  — функции напряжения и температуры,  $\psi$  — функции времени и температуры ( $\psi$  - монотонно и быстро убывающая функция времени). При  $Q=Q_1=Q_2$  из (10) следует (9).

При малых значениях времени вторым слагаемым выражения (10) по сравнению с первым можно пренебречь, и тогда процесс ползучести описывается первым слагаемым (первая стадия ползучести). Как следует из структуры первого слагаемого, кривые ползучести в первой стадии геометрически подобны.

При больших значениях времени можно пренебречь первым слагаемым, и тогда процесс ползучести описывается вторым слагаемым уравнения, из рассмотрения которого следует, что зависимость деформации ползучести от времени во второй стадии линейна.

Функция  $Q_2$  представляет собой минимальную скорость деформации ползучести. Различные рекомендации относительно вида функций  $Q, Q_1, Q_2$  и  $\psi$  предложены, например, Работновым Ю.Н. [18], Эндрейдом [19]. Экспериментально получена зависимость (10) для величины логарифмической деформации:

$$\overline{\varepsilon^c} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \left( 1 + \beta t^{\frac{1}{3}} \right) + kt. \quad (11)$$

Часто вместо (10) и (9) используют зависимость

$$\varepsilon^c = \sigma^n \Omega. \quad (12)$$

Из последней получают

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = \xi^c = \sigma^n \frac{d\Omega}{dt} = \sigma^n B. \quad (13)$$

Величину показателя степени  $n$  определяют, как это было указано выше (см.(7)). Затем по кривой ползучести определяется функция  $\Omega$ . Для этого ординаты экспериментальной кривой делят на величину напряжения в степени  $n$ . Если кривые ползучести подобны и зависимость (12) справедлива, то для всех кривых должен получиться один график функции  $\Omega$ .

Так как во второй части процесс ползучести протекает с постоянной скоростью, то на основании (7) и (7')  $B = k$ , и, согласно (13)  $\Omega = a + kt$  (см. линия 1 рис.5).

Кривые ползучести являются основой расчетов на ползучесть. Для сопоставления сопротивлению ползучести различных материалов введена условная характеристика — так называемый предел ползучести  $\sigma_{пл}$  - *напряжение, при котором деформация ползучести за заданный промежуток времени достигает величины, установленной техническими условиями.*

Из этого определения следует, что для конкретного материала предел ползучести зависит от температуры и времени испытания, а также от принятой величины деформации ползучести. Заданный промежуток времени обычно принимают равным сроку службы конструкции. Деформацию ползучести выбирают исходя из условий нормальной эксплуатации конструкции за срок ее службы.

Если приближенно принять скорость деформации ползучести постоянной то возможно и иное определение предела ползучести  $\sigma_{пл}$ , которое часто используют в практике: *напряжение, при котором скорость деформации ползучести равна определенной величине, установленной техническими условиями.* Величина предела ползучести в таком определении зависит от температуры и принятой величины скорости деформации ползучести.

Величина предела ползучести устанавливается обработкой семейства кривых ползучести (рис.4). Предел ползучести на основе выбранной величины деформации ползучести  $\epsilon_{пл}$  за определенный промежуток времени  $t$  можно определить по чертежам семейства кривых ползучести при различных напряжениях: для этого проводят вертикаль на расстоянии  $t_1$  от оси ординат

(рис.4) и устанавливают зависимость напряжения от деформации ползучести для выбранного значения времени  $t_I$ ; построив график (рис.5) находят величину предела ползучести  $\sigma_{пл}$ .

Для определения предела ползучести по минимальной скорости деформации ползучести  $\xi_{min}^c$  при помощи кривых ползучести (см. рис.4) устанавливают вначале значения ее при различных напряжениях. Затем в логарифмических координатах строят график, который, как отмечалось выше, является линейным. По этому графику и находят величину предела ползучести.

## 5. Модели механической теории ползучести

Механическая теория ползучести устанавливает связь (определяющие уравнения) механических параметров состояния – напряжения и деформации [20]. Эти соотношения должны существенным образом содержать некоторые временные операторы – дифференциальные или интегральные. В идеале механическая теория разрушения должна содержать в себе элементы, позволяющие предсказать момент разрушения. Феноменологический подход, свойственный механике, не избавляет механика от необходимости считаться с физикой процесса. Так, кривые зависимости деформации от времени внешне кажущиеся чрезвычайно похожими и поэтому вызывающие желание сконструировать некоторые универсальные уравнения, сталкиваются с различным строением тел и механизмами, вызывающими их ползучесть.

Формулировки для механической теории ползучести для одномерного случая учитывают, что процесс ползучести есть процесс вязкого течения, сопровождающийся некоторыми структурными изменениями. Скорость ползучести при данном структурном состоянии определяется напряжением и температурой:

$$\dot{p} = v(\sigma, T). \quad (14)$$

Считается, что полная деформация представляет собой сумму мгновенной деформации  $e_0$  и деформации ползучести  $p$ :

$$e = e_0 + p \quad (15)$$

В свою очередь, мгновенная деформация состоит из упругой и пластической составляющих, так что

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \dot{\sigma}/E + \mathbf{g}'(\sigma)\dot{\sigma} (\dot{\sigma} > 0) \\ \mathbf{e}_0 &= \sigma/E (\dot{\sigma} < 0) \end{aligned}$$

Распространяя на трехосное напряженное состояние - следует считать, что компоненты тензора скоростей деформации ползучести  $\mathbf{p}_{ij}$  являются функциями компонент тензора напряжений и температуры:

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{v}_{ij}(\sigma_{rs}, T). \quad (16)$$

При этом единственное условие, накладываемое на функции, состоит в том, что мощность диссипации должна быть положительной:

$$\mathbf{v}_{ij}\sigma_{ij} > 0$$

Обычно предполагается, что зависимость (16) – потенциального типа, т.е. существует потенциал ползучести  $\Phi(\sigma_{ij})$ :

$$\mathbf{p}_{ij} = \partial\Phi/\partial\sigma_{ij}. \quad (17)$$

Далее преобразованием Лежандра получают обратные соотношения

$$\sigma_{ij} = \partial U/\partial \mathbf{p}_{ij}, \quad U = \sigma_{ij}\mathbf{p}_{ij} - \Phi \quad (18)$$

В данном изложении существование потенциалов  $\Phi$  и  $U$  не является следствием общих законов механики или термодинамики. Однако в направлении построения термодинамической теории пластичности был выполнен цикл работ А.А.Вакуленко.

Дальнейшее развитие теории заключалось в учете структурных изменений, сопровождающих ползучесть, путем учета структурных параметров  $q_i$  скалярных в одномерном случае и, вообще говоря, тензорных. В этом случае уравнение одномерной ползучести записывается в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{v}(\sigma, T, q_1, q_2, \dots, q_s).$$

При этом должны быть заданы уравнения, описывающие изменения структурных параметров во времени. В общем случае следует считать, что потенциалы ползучести зависят от структурных параметров:

$$\Phi = \Phi(\sigma_{ij}, T, q_m), \quad U = U(\mathbf{p}_{ij}, T, q_m).$$

Простейшее предположение, что структурный параметр, определяющий сопротивление ползучести, монотонно изменяется со временем (например, структурный параметр - просто время). Если считать мгновенную деформацию упругой и деформацию ползучести не сопровождать изменением объема, то уравнения теории течения со старением принимают вид

$$\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2G} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \Phi(\sigma_{ij}, t)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (19)$$

Наиболее простой вид уравнения этой теории получаются в том случае, когда кривые ползучести подобны. Тогда потенциал можно представить в виде произведения функции от напряжений на функцию от времени и уравнения по форме оказываются совпадающими с уравнениями установившейся ползучести (17) при замене в последнем дифференцирование по времени дифференцированием по модифицированному времени  $\tau$ .

По мере накопления деформации ползучести происходят структурные изменения материала, что приводит к уменьшению скорости ползучести при данном напряжении и температуре, такие процессы понимают как упрочнение. Простейшее предположение в оценке этого явления, что величина накопленной деформации ползучести служит мерой упрочнения. В более общем случае за меру упрочнения может быть принята величина необратимой работы, рассеянной в процессе ползучести (А.А.Вакуленко, И.И.Бугаков, Ю.Н.Работнов):

$$q = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (20)$$

На практике распространена теория, совпадающая по форме с деформационной теорией пластичности, но с введением в уравнение времени явно как параметра. Первичные данные по ползучести при этом представляются в виде так называемых изохорных кривых, каждая из которых отвечает заданному времени. Расчет на ползучесть при этом сводится к серии расчетов по обычной деформационной теории пластичности, при этом каждый раз применяемая кривая ползучести отождествляется с диаграммой деформирования материала.

## **6. Технические модели теории ползучести**

Для установления зависимостей между деформациями, напряжениями, скоростями их изменения и временем предварительно максимально ограничивается число переменных, и далее высказывается предположение о существовании между ними функциональной зависимости. Такие предположения носят название технических теорий ползучести. В настоящее время существуют три технические теории ползучести: старения, течения и упрочнения. Эти названия в значительной мере являются условными. Изначально технические теории ползучести формулируются для простейшего случая одноосного напряженного состояния [21].

Современные теории ползучести бетона в основном используют феноменологический подход – необходимые для количественного анализа уравнения строят на основе некоторых достаточно общих предположений в сочетании с результатами макро эксперимента. В бетоне процесс ползучести протекает сложно и своеобразно. Если стремиться учесть в механических уравнениях ползучести все факторы, то невозможно получить замкнутую систему механических уравнений теории ползучести.

Для описания явлений ползучести часто пользуются в качестве эвристического инструмента различного рода реологическими моделями, составленными из пружин, цилиндров с поршнями и т.п. Комбинируя пружины и вязкие элементы при параллельном, последовательном или групповом их соединении получают реологические модели отвечающие тому или иному реологическому состоянию.

Деформационные свойства наиболее простых реологических моделей описывают линейными дифференциальными уравнениями (см. раздел Анализ применения механических моделей для оценки поведения бетона).

Ф. Леви использовал механическую модель для бетона, в которой упругий элемент (заполнитель) соединен параллельно с упруго-вязким элементом (цементная матрица). Параметр модели заполнитель в его модели зависит не только от модуля упругости, но и от характера поверхности заполнителя. А.Ю.



Ишлинский и А.Р.Ржаницин использовали механическую модель Кельвина, представляющую собой параллельно соединенные упругий и вязкий элементы, с которыми последовательно соединен упругий элемент описываемую уравнением

$$nE\varepsilon + H\varepsilon = n\dot{\sigma} + \sigma', \quad (21)$$

где  $E$  – мгновенный модуль упругости,  $H$  – длительный модуль упругости,  $n$  – время релаксации.

Уравнение (21) является частным случаем уравнения  $\sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k \varepsilon_1}{dt^k} = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k \sigma_1}{dt^k}$  при  $n=p=1$ . В таком упруго-вязком теле, часто называемом телом Кельвина, имеет место полная обратимость деформаций ползучести, и уравнение (21) описывает в нем упругое последствие. Релаксация напряжений будет происходить в нем по экспоненциальному закону с аргументом  $t/n$  (Ю. Н. Работнов). При этом, если после приложения мгновенной деформации в рассматриваемом теле возникает напряжение, определяемое по мгновенному модулю, то в дальнейшем, при сохранении этой деформации неизменной, напряжение будет релаксировать до величины, соответствующей той же деформации при длительном модуле. Однако последнее уравнение не учитывает наличия необратимой части деформации ползучести бетона.

Реологическое уравнение (21) эквивалентно интегральному соотношению (Ю.Н. Работнов)

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) + (\lambda - \mu) \int_0^t \sigma(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} dt \right], \quad (22)$$

где  $1/\mu = nE/H$  - время запаздывания;  $1/\lambda = n$  - время релаксации, причем длительный модуль упругости  $H = E\mu/\lambda$  всегда меньше мгновенного модуля  $E$  так как всегда  $\lambda > \mu$ .

Учитывая, что скорость деформации ползучести по (22) гораздо меньше действительной А.Р.Ржаницин предложил рассматривать в последнем интегральном соотношении ядро вида

$$K(t - \tau) = \frac{A}{(t-\tau)^\alpha} e^{-\beta(t-\tau)}, \quad (23)$$

где  $A > 0$ ,  $\beta > 0$ , и  $0 < \alpha < 1$  - постоянные параметры, определяемые из опытов на простую ползучесть.

Теории ползучести бетона обычно классифицируют: а) теория упругой наследственности; б) теория старения; в) наследственная теория старения (или теория упругой наследственности со старением).

## 7. Теория упругой наследственности

Принцип наследственности (модель наследственной среды Больцмана) впервые был указан Л.Больцманом в 1876 г.[22], Больцман предложил форму общего линейного закона, выражающего принцип суперпозиции воздействий и их затухания во времени в виде уравнения (полная деформация в момент  $t$  складывается из упругой и предшествующей времени  $t$ )

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_1(t)}{E} + \int_0^t K(t - \tau) \sigma_1(\tau) d\tau, \quad (24)$$

где  $K(t-\tau)$  - ядро (или коэффициент) ползучести – характерная для данного материала монотонно убывающая функция ( $\tau$ -переменная интегрирования, изменяющаяся от 0 до 1). Ядро ползучести пропорционально скорости ползучести при постоянном напряжении  $\sigma_0$ , приложенном в момент  $t=0$  -  $K(t) = 1/\sigma_0 \cdot d\varepsilon_1/dt$ . В момент нагружения ( $t=0$ ) часто принимают, что  $K(0) \rightarrow \infty$ .

Уравнение (24) является линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

Если задана деформация, то из (24) получают решение в виде

$$\sigma_1(t) = E \cdot \varepsilon_1(t) + \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon_1(\tau) d\tau, \quad (25)$$

где  $R(t-\tau)$  – резольвента ядра  $K(t-\tau)$  (ядро релаксации). Если в момент времени  $t=0$  стержень получает постоянное удлинение  $\varepsilon_0$ , то  $R(t)$  пропорциональна скорости релаксации -  $R(t) = 1/\varepsilon_0 \cdot d\sigma_1/dt$ .

Более общее уравнение содержит ядро вида  $K(t, \tau)$ .

Больцманом было предложено ядро интегрального уравнения в виде  $K(t - \tau) = C/(t - \tau)$ , при использовании которого скорость деформации в начальный момент времени бесконечно велика и интеграл от него расходится.

Этот недостаток устраняется предложением Г. Дюффинга  $K(t - \tau) = C/(t - \tau)^a$ , где  $0 < a < 1$ .

Уравнение Больцмана содержит в себе, как частные случаи, рассмотренные выше дифференциальные зависимости. При  $R(t - \tau) = E/T \cdot e^{-(t-\tau)/T}$  из выражения (25) следует уравнение Максвелла.

Если ядро представить приближенно суммой экспоненциальных функций  $R(t - \tau) = \sum_{i=1}^n \frac{E_k}{T_k} e^{-(t-\tau)/T_k}$ , то уравнение Больцмана, при некоторых дополнительных условиях, эквивалентно соотношению (21).

Выбор ядра в виде  $Ce^{-\alpha(t-\tau)}$  равносителен использованию модели упруго-вязкой среды Кельвина.

Ю.Н. Работнов [23] ввел ядро вида  $K(t - \tau) = (t - \tau)^a / \Gamma(1 + a)$ , где  $\Gamma(1 + a)$  - гамма функция.

В работах [24-26.] приведены другие типы ядер. У А.П. Бронского вид ядра  $t^{\alpha-1} \exp(-t^\alpha)$ . А.А.Ржаницин предложил, более простое ядро, обладающее сходными свойствами  $t^{\alpha-1} \exp(-\beta t)$ .

Н.Х. Арутюнян [27] развил вариант этой теории (линейной наследственности), отражающей ползучесть и старение бетона.

Теория упругой наследственности была развита В.Вольтерра (1913г.) Уравнение (21) при  $n=p$  может быть заменено интегральным соотношением, содержащим оператор Вольтерра. Под ядром  $K(t - \tau)$  понимается произвольная функция, зависящая от разности двух аргументов – времени приложения нагрузки  $\tau$  и момента наблюдения  $t$ . При этом должен сохраняться принцип наложения воздействий. Таким путем записывается основное уравнение теории упругой наследственности, которое записывается в одном из следующих видов:

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) - \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \right], \\ \sigma(t) = E \left[ \varepsilon(t) + \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right]. \end{cases} \quad (26)$$

Упруго-наследственный материал, описываемый (26), называется упруго-наследственным и обладает, в отличие от идеально упругого, своеобразной

«памятью». Функцию  $K(t - \tau)$  часто называют «функцией памяти». Эта функция при неограниченном возрастании времени монотонно убывает.

Свойства упруго-наследственного материала полностью определяются модулем упругости и ядром ползучести (или релаксации). В некоторых случаях для описания свойств упруго-наследственного материала используют другие функции – например, спектры релаксации и ползучести, комплексный модуль упругости и т.п. Как установил В. Вольтерра, теория упругой наследственности с условием замкнутого цикла может отражать только поведение материалов, свойства которых не изменяются во времени. Кроме того в линейной теории упругой наследственности с условием замкнутого цикла деформация ползучести является полностью обратимой и не учитывает необратимую часть деформации ползучести.

Ю.Н. Работнов предложил связь между деформациями и напряжениями в виде следующего интегрального уравнения Вольтерра:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t K(t - \tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad (27)$$

где  $\varphi(\varepsilon)$  - некоторая нелинейная функция, характеризующая закон мгновенной деформации,  $K(t - \tau)$  - ядро, определяемое по опытным кривым ползучести.

Предложенная теория получила название теории пластической наследственности. Предлагаются и другие способы обобщения теории упругой наследственности на случай нелинейной ползучести.

## 8. Нелинейно наследственная среда

Варианты нелинейной теории наследственности разрабатывали в стремлении наиболее полно отразить процессы деформирования различных материалов.

Весьма общие уравнения такой среды получил Вольтерра. Более простое уравнение предложил Ю.Н. Работнов [20].

$$\varphi(\varepsilon_1) = \sigma_1(t) + \int_0^t Q(t - \tau)\sigma_1(\tau)d\tau. \quad (28)$$

$$\text{Или относительно } \sigma_1: \sigma_1(t) = \varphi - \int_0^t R(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau. \quad (29)$$

При малом  $t$  (быстрые испытания)  $\sigma_1 = \varphi(\sigma_1)$ . При постоянном напряжении  $\sigma_1 = \text{const} = \sigma_0$  из (28) следует

$$\varphi(\varepsilon_1) = [1 + K(t)]\sigma_0; \quad K(t) = \int_0^t Q(t - \tau) d\tau,$$

т.е. кривые деформаций при фиксированных напряжениях подобны.

Несколько иные формулировки предложены Н.Х Арутюняном [27] и М.И. Розовским [28].

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E + \int_0^t Q(t - \tau) f[\sigma_1(\tau)] d\tau \text{ и } \varepsilon_1 = \psi(\sigma_1) + \int_0^t Q(t - \tau) f[\sigma_1(\tau)] d\tau.$$

Концепция Арутюняна-Колмановского [29] предполагает, что вся нелинейность деформирования бетона происходит из за деформаций ползучести

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)/E(t) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{E(\tau)} d\tau - \int_{t_0}^t f[\sigma(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau, \quad (30)$$

где  $C(t, \tau) = (C_0 + A/\tau) \cdot [1 - e^{-r(t-\tau)}]$ .

Однако отмечает [29], что уравнения теории упругоползучего тела применимы лишь в случае отсутствия разгрузок и не учитывают смягчения нелинейности деформирования.

## 9. Теория старения

На практике распространена теория, совпадающая по форме с деформационной теорией пластичности, но с введением в уравнение времени явно как параметра. Первичные данные по ползучести при этом представляются в виде так называемых изохорных кривых, каждая из которых отвечает заданному времени. Расчет на ползучесть при этом сводится к серии расчетов по деформационной теории пластичности, при этом каждый раз применяемая кривая ползучести отождествляется с диаграммой деформирования материала.

Эта теория была предложена Содербергом [30]. Обобщение и анализ ее были даны Ю. Н. Работновым [31].

Для одноосного растяжения обычно формулируется в виде

$$\sigma = \Phi_1(\varepsilon, t). \quad (31)$$

Здесь предполагается, что при заданной температуре между деформацией, напряжением и временем существует определенная зависимость.

Высказанное предположение равносильно допущению о существовании при определенной температуре поверхности в координатах  $\sigma, \varepsilon, t$ . Рассекая поверхность плоскостями, перпендикулярными осям  $\sigma, \varepsilon, t$ , получаем соответственно кривые ползучести при постоянном напряжении (см. например, кривую на рис.3). Кривые релаксации напряжений при постоянной деформации (в осях  $\sigma - t$ ), графики зависимости напряжения от деформации для определенных значений времени (оси  $\sigma - \varepsilon$ ). Последние называют изохронными кривыми ползучести.

Для определения напряжения и деформации для заданного значения времени проводят расчет на прочность и жесткость изделия, используя изохронную кривую ползучести для принятого значения времени. Такая общая трактовка теории старения была предложена Ю. Н. Работновым [31].

Подобные изохронные кривые ползучести могут быть получены из одной кривой умножением ее ординат на некоторую величину, являющуюся функцией времени. В этом случае зависимость (31) может быть представлена произведением двух функций, одна из которых  $\varphi(\varepsilon)$  является функцией только деформаций, а другая  $\chi(t)$  — функцией только времени

$$\sigma = \varphi(\varepsilon) \cdot \chi(t) . \quad (32)$$

При  $\chi(0) = 1$  функция  $\varphi(\varepsilon)$  описывает диаграмму растяжения.

Функцию  $\chi(t)$  иногда записывают в виде:  $\chi(t) = 1/(1 + at^b)$ ,

где  $a$  и  $b$  — коэффициенты, зависящие от температуры. В случае постоянной деформации это уравнение описывает релаксацию напряжений.

Если известны кривые ползучести для различных напряжений и необходимо построить кривую релаксации при начальном напряжении  $\sigma(t)$ . То в таком случае на кривых ползучести для различных значений напряжения (рис.4,5) проводится горизонтальная прямая на расстоянии  $\varepsilon(t) = \sigma(t)/E$  от оси абсцисс. Точки пересечения этой прямой с графиками зависимости деформации

от времени определяют величины напряжений для определенных значений времени. Полученные результаты легко перенести в координаты  $t-\sigma$  и построить кривую релаксации.

Уравнения кривых ползучести (9) и (10) являются аналитическими зависимостями теории старения.

Применительно к бетону теория старения разработана Уитнеем [32] и Дишингером [33], далее развита в работах Н.А. Буданова [34], Глэнвиля [35], Я.В. Столярова [36], И.И. Улицкого [37].

За основу берется предпосылка, что мера ползучести бетона  $C(t, \tau)$  под которой понимается относительная деформация ползучести стареющего материала (в частности, бетона), наблюдаемую к моменту времени  $t$  и вызванную единичным напряжением, приложенным в возрасте бетона  $\tau$  имеет вид:  $C(t, \tau) = C(t) - C(\tau)$ , а это значит, что скорость удельной деформации ползучести  $dC(t, \tau)/dt$ , равная в данном случае  $\dot{C}(t)$ , не зависит от возраста бетона  $\tau$ , при котором он был нагружен. Дифференциальное уравнение скорости полной деформации в области линейной ползучести при переменном модуле упругости записывается в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E(t)} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma \frac{dC}{dt} \quad (33)$$

Поведение материала согласно этому уравнению можно представить простой реологической моделью, состоящей из последовательно соединенных упругого элемента и элемента вязкого трения, причем упругость и вязкость этих элементов меняются со временем соответственно множителям  $E(t)$  и  $\dot{C}(t)$ .

Эта же зависимость в интегральной форме:

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon(t)}{E(t)} - \int_0^t \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} K(\tau) d\tau, \quad (34)$$

где ядро ползучести  $K(t, \tau) = K(\tau) = E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} - C(\tau) \right]$  есть функция только возраста бетона  $\tau$ , т.е. времени действия напряжения.

Теория старения является частным случаем наследственной теории старения.

Основной недостаток теории старения заключается в том, что скорость изменения деформаций ползучести бетона получается не зависящей от истории его загрузки. По этой теории получается полная необратимость деформации ползучести. Теория старения не может описать ступенчатое нагружение, так как согласно этой теории в момент изменения напряжения деформация ползучести должна иметь разрыв, что, очевидно, невозможно.

## 10. Наследственная теория старения

Начало развитию данной теории положил Г.Н. Маслов [38], а ее полное построение как математической теории ползучести бетона дано Н.Х. Арутюняном [27,29]. В дальнейшем эта теория получила развитие в работах С.В. Александровского [39], П.И. Васильева [40], А.А. Гвоздева [41], И.Я. Панарина [42], И.Е. Прокоповича [43], К.С. Карапетяна [44], М.М. Манукяна [45] и других исследователей.

В области линейной ползучести бетона наследственная теория старения при одноосном напряженном состоянии исходит из следующих основных уравнений

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} K(t, \tau) d\tau, \quad (35)$$

$$\sigma(t) = E(t) \left[ \varepsilon(t) + \int_{\tau_1}^t \varepsilon(\tau) \Gamma(t, \tau) d\tau \right], \quad (36)$$

где функция  $\Gamma(t, \tau)$  есть резольвента ядра

$$K(t, \tau) = E(\dot{t}) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) \quad (37)$$

интегрального уравнения (35), а  $\delta(t, \tau)$  – полная продольная относительная деформация, наблюдаемая в момент времени  $t$  и вызываемая единичным напряжением, приложенным к бетону в некотором возрасте  $\tau$ , определяемая зависимостью

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau), \quad (38)$$

где  $E(\tau)$  переменный модуль мгновенной деформации бетона, а  $C(t, \tau)$  – мера ползучести бетона, которая в области линейной ползучести не зависит от величины напряжения, но зависит одновременно от  $\tau$  и  $t - \tau$ .

Ядро оператора Вольтерра или «функцию памяти» можно записать в виде



$$K(t, \tau) = - \frac{1}{E(\tau)} \frac{dE(\tau)}{d\tau} + E(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad (39)$$

т.е. выделить из наследственной функции влияние мгновенной деформации и влияние деформации ползучести бетона. В конечном итоге основным вопросом при построении линейной теории ползучести бетона является выбор функций для модуля упруго-мгновенной деформации  $E(\tau)$  и для меры ползучести бетона  $C(t, \tau)$ .

Многочисленные опыты показывают влияние на  $E(\tau)$  возраста бетона, длительности и величины действия нагрузки, условий твердения, величины напряжения, при которой измерены деформации. Поэтому обычно для учета  $E(\tau)$  используют аппроксимацию экспериментальных кривых.

Мера ползучести  $C(t, \tau)$  исходя из опытов в области линейной ползучести должна удовлетворять следующим условиям:

а)  $C(t, \tau) > 0$  при  $\tau > t$ ,  $C(t, \tau) = 0$  при  $\tau = t$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} = 0$  при  $0 \leq \tau \leq t$ ;

в) мера ползучести  $C(t, \tau)$  монотонно убывает с возрастом  $\tau$ , т.е.  $\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} < 0$  при  $0 \leq \tau \leq t$ , причем так, чтобы  $\lim_{n \rightarrow \infty} C(t, \tau) = \varphi(\tau)$ , где  $\varphi(t)$  - предельное значение меры ползучести для данного возраста материала;

г) начиная с некоторого возраста  $\tau_0$ , значение  $C(t, \tau)$  должно сколь угодно мало отличаться от меры ползучести  $C(t - \tau)$  для старого или уже стареющего материала, для которого выполняется условие замкнутости цикла.

Кроме того как показывают экспериментальные исследования кривые  $K(\tau)$  при постоянном  $t$  имеют два участка с весьма быстрым изменением функции: один при малых значениях  $\tau$  связан с изменением модуля упруго-мгновенных деформаций, второй при малых значениях  $t - \tau$  связан с большой скоростью деформации ползучести сразу после загрузки.

На основе указанных выше соображений, а также принимая во внимание процесс старения Н.Х. Арутюнян предложил представить меру ползучести для стареющего материала в виде произведения двух функций, одна из которых учитывает процесс старения материала  $\varphi(\tau)$ , другая влияние длительности его нагружения:

$$C(t, \tau) = C(t - \tau, \tau) = \varphi(\tau)f(t - \tau). \quad (40)$$

Для лучшего описания результатов экспериментальных исследований существуют различные предложения по комбинации мер ползучести и по применению различных выражений для описания меры ползучести.

При напряжениях в бетоне превышающих (по абсолютному значению) половину от предела прочности бетона на сжатие уравнение нелинейной теории наследственного старения при одноосном напряженном состоянии для всех значений  $\sigma(t) \geq \frac{1}{2}R$  можно представить в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t \Phi(t, \tau, \sigma(\tau)) d\tau. \quad (41)$$

Если функцию  $\Phi(t, \tau, \sigma(\tau))$  представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от  $\tau$  и  $t - \tau$ , а вторая только от  $\sigma$ , то уравнение нелинейной теории наследственности можно представить в виде предложенным Н.Х. Арутюняном:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t F(\sigma(\tau)) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (42)$$

Последняя зависимость не может быть представлена для стареющих материалов, у которых время упругого последействия или время релаксации зависит от напряжения. Иными словами для кривых ползучести не имеет место подобие в области высоких напряжений ( $\sigma(t) \geq \frac{1}{2}R$ ).

И.Е. Прокополвич [43] предлагает выражение для меры ползучести представить как сумму обратимых и необратимых деформаций

$$C(t, \tau) = C_0(t - \tau) + A(t) - A(\tau). \quad (43)$$

Здесь в правой части первое слагаемое представляет обратимые деформации, второе и третье – необратимые.

На деформацию материала в момент времени  $t$  под влиянием нагрузки приложенной в момент  $\tau$  влияет изменение состояние материала на всем промежутке  $\tau - t$ . А.Р. Ржаницин [46] предложил ввести характеристику состояния материала не в виде функций  $t$  или  $\tau$ , а виде функционала, зависящего от состояния материала во всем промежутке от  $\tau$  до  $t$ . В предлагаемом

упрощенном приближенном решении зависимость между напряжениями и деформациями определяется формулой:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma(t)}{E} - \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) S(t, \tau) d\tau + \boldsymbol{\varepsilon}_0(t), \quad (44)$$

где  $S(t, \tau)$  - функция влияния единичного импульса напряжения  $\sigma d\tau$ , приложенного в момент  $\tau$ , на деформацию  $\boldsymbol{\varepsilon}$  в момент  $t$ . Для бетона в абсолютном времени записывается в виде

$$S(t, \tau) = B' \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\gamma} \ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\tau} \quad (45)$$

Вводится условное время  $z$ , связанное с абсолютным при помощи формулы

$$z = \frac{1}{a} \ln ct. \quad (46)$$

Здесь  $B'$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  и  $a$  – постоянные коэффициенты, подбираемые на основе экспериментальных данных.

В последующем И.Е. Прокополвич [47] систематизировал имеющиеся наработки нелинейной теории старения. Предложил классификацию бетона по степеням вызревания к моменту приложения воздействия. Применительно к линейной наследственной теории старения рекомендовал функции для аппроксимации  $C(t, \tau)$  и  $E$ . Таблица составлена применительно к бетонам естественного твердения. Деформации ползучести характеризуемые мерой ползучести  $C(t, \tau)$  (поверхность в координатах  $t, \tau$ ) строится на основе обработки данных опытов с образцами-близнецами, находящимися в стационарных температурно-влажностных условиях, к которым в разное время прикладываются одинаковые постоянные во времени длительные нагрузки. В нелинейной теории строится семейство поверхностей  $C(t, \tau, \sigma_j)$  для определенных уровней постоянных напряжений  $\sigma_j$ . Полнота соответствия предложенных кривых фактическому поведению бетона в основном зависит от соответствия режимов испытания и режима фактической загрузки конструкции.

Таблица 1.

Возраст, сут	Особенности деформирования	Рекомендуемые зависимости
Интенсивно стареющий бетон, начертание кривых ползучести связано с $\tau$		
$\tau_1 < 2$	$C(t, \tau) \neq C(t - \tau)$ , $E = E(\tau) \neq \text{const}$	$C(t, \tau) = \varphi(\tau) - F(t)(e^{\gamma\tau} - A_2) - \Delta(\tau)E^{-\alpha(t-\tau)},$ $\varphi(\tau) = \Psi(\tau) + \Delta(\tau), F(t) = \frac{\Psi(t)}{e^{\gamma t} - A_2},$ $E(\tau) = E_0(1 - \beta_1 e^{-\alpha_1 \tau} - \beta_2 e^{-\alpha_2 \tau}),$ $0 < \beta_1 \leq 1, 0 \leq \beta_2 < 1, \beta_1 + \beta_2 \leq 1$
Стареющий бетон, начертание кривых ползучести не связано с $\tau$		
$28 \leq \tau_1 < 360$	$C(t, \tau) \neq C(t - \tau)$ , $E(\tau) \approx E = \text{const}$	$C(t, \tau) = \theta(\tau)[1 - A_1 e^{-\gamma_1(t-\tau_1)} - A_3 e^{-\gamma_2(t-\tau)}],$ $0 < A_1 \leq 1, 0 \leq A_3 < 1, A_1 + A_3 \leq 1,$ $\theta(\tau) = C_0 + A e^{-\gamma\tau}, \quad \theta(\tau) = C_0 + \frac{A}{1 + r}$ <p style="text-align: center;">В частности <math>C(t, \tau) = \theta(\tau)[1 - B e^{-\gamma_1(t-\tau_1)}]</math>,  <math>E(\tau) = E(\tau_1) = \text{const}</math>,  <math>E(\tau) = E[1 - \beta_1 e^{-\alpha_1 \tau}]</math></p>
Старый бетон, семейство кривых вырождается в одну кривую		
$\tau_1 \geq 360$	$C(t, \tau) = C(t - \tau)$ , $E(\tau) = E = \text{const}$	$C(t - \tau) = C_0[1 - A_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)} - A_3 e^{-\gamma_2(t-\tau)}],$ $0 < A_1 \leq 1, 0 \leq A_3 < 1, A_1 + A_3 \leq 1$

Полученные выражения в этом случае являются корреляционными, т.е. характеризуются не только эмпирической линией регрессии, но и показателями рассеивания экспериментальных данных. Прокопович И.Е. отмечает, что необратимые деформации, связанные с микроразрушениями, не вписываются в предлагаемые теории (рассматривается однородное изотропное и сплошное тело). Различные предложения по учету этого требуют получения и других экспериментальных характеристик.

Вторая (после Арутюняна Н.Х) концепция учета деформаций ползучести разработана школой А.А. Гвоздева [48-54] предложена «двухкомпонентная теория ползучести бетона». В этом варианте неупругие деформации бетона состоят из двух компонент. Основное уравнение этой теории имеет вид [50].

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)/E(t) + \int_{t_1}^t S(\tau)K(t, \tau)d\tau + \int_0^{\max S} f(s)F[T(s, t)]ds. \quad (47)$$

Последнее уравнение для бетона старого возраста имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)/E_0 + \int_{t_1}^t \sigma(\tau)K(t - \tau)d\tau + \int_0^{\max \sigma} f(\sigma)F[T(\sigma, t)]d\sigma. \quad (48)$$

Решение задач на базе теории А.А.Гвоздева – К.З. Галустова ищется как произведение упругих напряжений, умноженное на функцию релаксации напряжений нелинейной двухкомпонентной теории ползучести:

$$\sigma_b(t) = \sigma_{by}(\tau_1)H_b(t, \mu); \quad \sigma_a(t) = \sigma_{ay}(\tau_1)H_a(t, \mu), \quad (49)$$

где  $H$  - функции релаксации напряжений, имеющие вид:

$$H_b(t, \mu) = \frac{Ue^{-\varphi t} + Qe^{-\delta t} + Re^{-(\varphi-\delta)t} + S^*}{U+Q+R+S^*};$$

$$H_a(t, \mu) = \frac{1}{m\mu} [1 + m\mu - H_b(t, \mu)]. \quad (50)$$

В монографии Галустова К.З.[50] показано, что уравнения двухкомпонентной теории ползучести являются общими, из которых как частный случай получаются уравнения состояния других феноменологических теорий ползучести бетона.

В целом имеющиеся теоретические разработки теории деформирования бетона еще мало учитывают температурно - влажностное состояние материала, влияние анизотропии и разномодульности и др. Разработанные теории применены для конкретных задач и условий и для конкретных задач получены достаточно полные и точные решения.

Обзор экспериментальных данных по ползучести, усадке, длительной прочности, изменения модуля упруго-мгновенных деформаций и др. приведен в [43,50].

## 11. Теория течения

Теория течения обычно формулируется для одноосного растяжения в виде уравнения:

$$\sigma = \Phi_2(\xi_i^C, t). \quad (51)$$

Здесь предполагается, что *при заданной температуре между напряжением, скоростью деформации ползучести и временем существует определенная зависимость.*

Эта теория была предложена Давенпортом. [55]. Она получила довольно большое распространение в связи с работами Л. М. Качанова [56].

Для решения задач по этой теории необходимо располагать большим количеством кривых ползучести. Однако предварительно связав скорость

деформации ползучести, деформацию ползучести и напряжение определенной аналитической зависимостью, можно вывести уравнение кривой релаксации.

Наиболее распространенной аналитической зависимостью скорости деформации ползучести от напряжения и времени является зависимость вида (12)

$$\xi^C = \sigma^n \frac{d\Omega}{dt} = \sigma^n B \quad (52)$$

Эту зависимость можно рассматривать как обобщение формулы (12) на случай напряжений, изменяющихся во времени. Используя (12) Л.М. Качанов построил уравнение семейства кривых релаксации по теории течения:

$$\sigma = \sigma(0) [1 + (n-1)E\sigma^{n-1}(0)\Omega]^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (53)$$

По теории течения Л. М. Качанова кривые ползучести являются геометрически подобными.

## 12. Теория упрочнения

Теория упрочнения так же, как и две предыдущие технические теории ползучести, обычно формулируется для одноосного растяжения в виде уравнения

$$\sigma = \Phi(\varepsilon^c, \xi^c), \quad (54)$$

т. е. предполагается, что *при заданной температуре между напряжением, деформацией ползучести и скоростью деформации ползучести существует определенная зависимость.*

Эта теория была предложена Людвигом [57], Надаи [58] и Давенпортом [55]. Дальнейшее развитие теории упрочнения принадлежит Ю. Н. Работнову [18].

В отличие от теории течения согласно теории упрочнения скорость деформации ползучести является функцией напряжения и деформации ползучести и от времени не зависят.

Ввиду того, что скорость деформации ползучести для некоторого значения времени по теории упрочнения меньше, чем по теории течения, кривая релаксации, построенная на ее основе, располагается всегда выше кривой релаксации, построенной по теории течения.

Аналитическая зависимость между скоростью деформации ползучести, деформацией ползучести и напряжением обычно представляется в виде

$$f(\sigma) = \xi^c (\varepsilon^c)^\beta, \quad (55)$$

причем предполагается, что  $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ .

Для функции напряжения  $f(\sigma)$  были предложены следующие выражения:

$$f(\sigma) = \alpha \varepsilon^\beta; f(\sigma) = \alpha((\exp(\sigma/b)) - 1); f(\sigma) = \alpha(\exp(\sigma/b)), \quad (56)$$

где  $\alpha, \beta$  — коэффициенты материала, зависящие от температуры.

Недостатком теории течения, как и теории старения, является то, что в основные уравнения этих теорий время включено явным образом, вследствие чего эти уравнения неинвариантны относительно изменения начала отсчета времени. Однако при плавно изменяющихся нагрузках теории течения и старения хорошо согласуются с результатами опытов.

Теория старения предполагает наличие функциональной связи между деформацией, напряжением и временем. В действительности это невозможно, так как наличие такой связи означало бы, что величина деформации  $\varepsilon$  в момент времени  $t$  не зависит от процесса нагружения, т. е. от величин напряжений в моменты времени, предшествующие моменту  $t$  что противоречит опыту.

Из полученных результатов здесь выделим обобщение постулата Драккера предложенное А.А. Ильюшиным (1961) – для любого замкнутого по деформациям изотермического процесса  $\int \sigma_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} \geq 0$ , где  $\sigma_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta}^p$  - компоненты тензора напряжения и тензора деформаций элементарного образца;  $d\varepsilon_{\alpha\beta}^p = d\varepsilon_{\alpha\beta} - d\varepsilon_{\alpha\beta}^e$  - остаточное приращение  $d\varepsilon_{\alpha\beta}$  с учетом упругой деформации. Знак равенства имеет место только тогда, когда процесс является обратимым. Другими словами картина «баланса энергии» при которой работа полностью диссипирует, характерна только для идеально пластической среды. Для среды, свойства которой изменяются в результате пластической деформации, часть этой работы всегда превращается в так называемую «скрытую энергию деформаций». Однако здесь возникает так называемое

«пластическое разрыхление» - развитие сети трещин, мало заметное при простом нагружении и заметное при многократно-повторных нагружениях.

В монографии [59] авторы выделяют два основных направления к изучению прочности материала - физический и механический. Физические теории стремятся к пониманию внутренней природы процессов. Сложность физических процессов нарушения прочности затрудняет создание общих закономерностей физической теории. Механические теории феноменологически описывают макроскопическое поведение твердого тела.

Феноменологические теории берут за основу простейшие случаи напряженного состояния, определяемые экспериментально. Более сложные случаи строятся на основе простейших случаев, используемых в качестве параметров. Механические теории различают два случая разрушения: отрыв по плоскости, перпендикулярной действующей силе и путем сдвига по наклонной площадке.

Деформационная теория пластичности бетона может быть записана в виде

$$\Gamma = G_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right) \Gamma, \quad (61)$$

где  $T = \sqrt{1/6} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$  - интенсивность касательных напряжений;  $\Gamma = \sqrt{2/3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \Gamma$  - интенсивность деформаций сдвига;  $\Gamma_s$  - предельное значение интенсивности деформаций сдвига;  $G_0$  - константа, начальный модуль сдвига.

При долговременном действии нагрузки предлагается использовать линейную теорию ползучести.

### 13. Модели механики разрушения

Работы по механике разрушения можно разбить на два направления [60]. Согласно первому направлению, берущему начало ещё от Галилея, предполагается, что разрушение тела происходит, как только в некоторой его точке определенная комбинация параметров  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $T$  и  $t$  достигнет критического значения. При этом сам процесс не рассматривается. При таком подходе



проблема прочности решается подбором реологической модели и критерия разрушения (в сопротивлении материалов теории прочности).

Критерий разрушения часто можно рассматривать как результат накопления сложных микрофизических процессов приводящих к образованию макродефекта. Например, Г.Ламе и В. Ранкин принимали в качестве критерия прочности наибольшее главное напряжение, В. Понселе и А. Сен-Венан – наибольшую деформацию.

Изучение критериев разрушения в рамках указанного подхода сохраняет основное практическое значение при расчетах на прочность. Однако исследования прочности и разрушения только в этом направлении недостаточно. Многие явления разрушения не могут быть объяснены с точки зрения теорий прочности. Это привело некоторых исследователей к отказу от Галилеева представления о прочности как о некоторой константе материала. Это направление берет начало от работ А.А. Гриффита, Дж.И. Тейлора, Э.О. Орована, Дж.И. Ирвина и др. опирается на изучение самого процесса разрушения. В качестве исходных положений обычно используются следующие положения. Разрушение твердого тела происходит почти всегда вследствие развития в нем некоторых поверхностей разрыва смещений. Развитие поверхностей разрыва начинается с несовершенства структуры материала в виде начальных трещин или дислокаций. Развитие начальных возмущений при нагружении может быть самым различным.

Для роста дислокаций характерно почти одновременное и стабильное развитие сразу многих дислокаций, образующих полости и целые пластические области. Поэтому теория дислокаций является физической основой феноменологической теории пластичности.

Для роста трещин характерно преимущественное развитие одной наиболее опасной трещины (однако есть исключения, например рост трещин в условиях сжатия, близкого к всестороннему). При составлении критерия прочности на основе теории трещин оказывается, что в большинстве случаев получаются обычные теории прочности, однако фигурирующие в них константы следует

считать уже зависящими от размеров начальных трещин, их формы и местоположения. В теории трещин наиболее принципиальным моментом является формулировка условия локального разрушения в рассматриваемой точке контура трещин. Имеются различные модели детального механизма разрушения в конце трещины. Известные модели, отличающиеся детальной схемой описания локального разрыва в конце хрупкой трещины, эквивалентны в том смысле, что всегда приводят к условию Гриффита-Ирвина.

Для наиболее распространенного и важного случая трещин нормального разрыва условие Гриффита – Ирвина имеет следующий вид:

$$K_I \leq K_{IC} \left( K_{IC}^2 = \frac{2E\gamma}{1-\nu^2} \right). \quad (62)$$

Здесь постоянная хрупкого материала  $K_{IC}$  - критический коэффициент интенсивности напряжений,  $E$  - модуль Юнга,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $\gamma$  - энергия диссипации, приходящаяся на единицу площади растущей трещины (равна необратимой работе внешних сил, затраченной на образование единицы площади поверхности трещины).

Теория предельного равновесия и теория хрупких трещин составляют основу современной механики разрушения.

С точки зрения сравнения хрупкого и пластичного разрушений интересна схема перехода вязкого разрушения в хрупкое с понижением температуры, предложенная А.Ф. Иоффе (1924). Согласно этой схеме напряжения  $\sigma_B$  и  $\sigma_{0,2}$  по-разному зависят от температуры  $T$ : первое возрастает с увеличением  $T$ , а второе убывает так, что точка пересечения этих кривых (температура хладоломкости) разделяет области вязкого и хрупкого разрушения.

Начало изучения сопротивления материалов с учетом имеющихся в нем начальных трещин положили работы Г. Кирша (1989), Г. В. Колосова (1909) и Ч.Э. Инглиса (1913), Н.И. Мусхелишвили (1919, 1942, 1968), А. А. Гриффитса (1920, 1925). Следующий значительный шаг в трудном пути становления современной механики разрушения связан с экспериментальными исследованиями английского ученого Дж. Ирвина (1948 г.) и венгерского ученого Е. Орована (1950 г.), предложившими использовать теорию Гриффитса

для квазихрупкого разрушения металлов и неметаллов, когда все необратимые процессы пластических деформаций происходят лишь в малой окрестности вблизи вершины трещины. Достаточно только в теории Гриффитса константу, равную поверхностной энергии материала, заменить на удельную работу пластических деформаций (последняя может в сотни и тысячи раз превосходить первую), и тогда теория Гриффитса окажется полезной для многих распространенных материалов.

Силовой подход Ирвина, адекватный в принципиальном отношении энергетическому подходу Гриффитса, позволил обойти почти непреодолимые вычислительные трудности, с которыми приходилось сталкиваться до конца 50 - х годов при решении задач в рамках концепции Гриффитса.

Линейная механика разрушения приняла в целом законченную форму и заняла в бурно развивающейся механике разрушения такое почетное место, как, допустим, теория упругости в механике деформируемого твердого тела.

Исследования М.В. Александрова, Г.И. Баренблатта, Л.Т. Бережницкого, Л.А. Галина, Ф.Д. Гахова, А.А. Каминский, М.В. Келдыша, Н.Е. Кочина, М.А. Лаврентьева, С.Г. Лехницкого, А.И. Лурье, М.Я. Леонова, Б.Л. Лозового, В.В. Панасюка, В.З. Партона, Н.Г. Савина, Л.И. Седова, Р.Л. Салганика, Б.И. Сметанина, Я.С. Уфлянда, С.А. Христиановича, Д.И. Шермана, И.Я. Штаермана, Г.П. Черепанова, Ф. Эрдогана, Г.С. Си, О.Л. Бови, Г.М. Вестергарда, Л.Н. Дж. Файлону, А.Н. Стро, Н.Ф. Мотта, К.Б. Броберга и других ученых решали и решают задачи теории трещин.

Особенности хрупкого и пластического разрушения вызвали необходимость оценки работы материалов по хрупкости или пластичности путем испытания на разрыв образцов с искусственно создаваемой трещиной. Основную роль в формировании такого подхода сыграли работы Н.Н. Давиденкова, А.Ф. Иоффе, Г.В. Ужика, Я.Б. Фридмана, Б.А. Дроздовского, С.В. Серенсена, Н.А. Махутова.

Развитие механики разрушения применительно к бетону и железобетону связано в настоящее время с работами В.М.Бондаренко, Ю.В. Зайцева, Н.И.

Карпенко, В.И. Колчунова, С.Н. Леоновича, Н.И. Макридина, Е.Н. Пересыпкина, К.А. Пирадова, В.П. Селяева, Б.С. Соколова, С.М. Скоробогатова, Л.П. Трапезникова, Е.Н. Щербакова, В.И. Ягуста, и др.

### Выводы

Современные модели бетона в механике твердого тела ограничиваются феноменологическим подходом: следуя обычному методу механики сплошных сред, необходимые для количественного анализа на основе некоторых достаточно общих предположений в сочетании с результатами макроэксперимента.

Из различных предложенных уравнений для описания закономерностей изменения деформаций ползучести со временем при осевом сжатии в наибольшей степени отвечают экспериментальным данным уравнение общего вида (61):

$$C(t, t_1) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t - t_1) + F(t_1) - F(t), \quad (61)$$

где  $C$  – мера ползучести;  $t$  – момент времени, соответствующий данному наблюдению;  $t_1$  – момент времени, соответствующий загрузке образца длительно действующей нагрузкой.

Вид функций  $\varphi(t_1)$ ,  $F(t)$ ,  $F(t_1)$  и  $\varphi(t-t_1)$  достаточно сложен. Например, для образцов, нагружаемых в раннем возрасте, выражение для  $C(t, t_1)$  принимает вид, по данным А.В. Яшина (62):

$$C(t, t_1) = \left(1 + \frac{k_1}{t_1}\right) \left[ B_1 \left(1 - e^{-\frac{1}{\gamma_1}(t-t_1)}\right) + B_2 \left(1 - e^{-\frac{1}{\gamma_2}(t-t_1)}\right) \right] + A_1 \cdot e^{-\frac{1}{\alpha_1}t_1} - A_1 \cdot e^{-\frac{1}{\alpha_1}t} \quad (62)$$

Здесь  $k_1$ ;  $\gamma_1$ ;  $\gamma_2$ ;  $\alpha$ ;  $A_1$ ;  $B_1$ ;  $B_2$  – численные коэффициенты, определяемые по результатам испытания призм.

Если загрузка образцов происходит не в раннем возрасте, то для выражения меры ползучести можно ограничиться первым членом этого выражения, т.е. пользоваться формулой в следующем виде:

$$C = (t, t_1) = \varphi(t_1) \left[ 1 - e^{-\gamma(t-t_1)} \right]$$

которая была предложена Н.Х. Арутюняном [27].

При учете распространения трещин можно воспользоваться одним из следующих выражений для удельных относительных деформаций ползучести  $C(t, \tau)$ , существующих в рамках так называемой наследственной теории старения бетона:

$$C(t, \tau) = \left( C_0 + \frac{A}{\tau} \right) [1 - e^{-\delta(t-\tau)}];$$

$$C(t, \tau) = C_0 [1 - e^{-\delta(t-\tau)}] + A(e^{-\delta\tau} - e^{-\delta t});$$

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) - \frac{e^{\delta\tau} - A_2}{e^{\delta t} - A_2} \cdot \psi(t) - \Delta(\tau) \cdot e^{-\alpha(t-\tau)}.$$

Первое выражение предложено Н.Х. Арутюняном [63], второе – И.Е. Прокоповичем и И.И. Улицким [47], третье – С.В. Александровским [64].

Выражение для меры ползучести в других теориях ползучести бетона – упругой наследственности или старения – может быть получено как частный случай второго выражения, если принять в нем соответственно  $A=0$  или  $C_0=0$ :

$$C(t, \tau) = C \cdot [1 - e^{-\delta(t-\tau)}];$$

$$C(t, \tau) = A \cdot (e^{-\delta\tau} - e^{-\delta t}).$$

В отличие от напряженно-деформированного состояния при стационарном режиме при нестационарном режиме меняется во времени и напряженно-деформированное состояние и температурное поле и другие внешние поля. Расчет напряженно-деформированного состояния при нестационарном режиме в общем случае в настоящее время не может быть решён в связи с большой его сложностью. Решаются отдельные простые случаи или применяются численные методы решения.

Методы механики разрушения применительно к модели деформирования бетона находятся в своем развитии.

Литература:

1. Ивлев Д. Д. К теории неустановившейся ползучести. В кн.: Проблемы механики сплошной среды. [Сборник статей]. М., Изд. АН СССР, 1961, с. 157—160.
2. Икрин В.А. Сопротивление материалов с элементами теории упругости. М: Изд. АСВ, 2004.- 424 с.
3. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Машиностроение», 1975. 400 с. с ил.
4. Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности/ Механика в СССР за 50 лет. Том.3. Механика деформируемого твердого тела. М., 1972, с.79-119.
5. Johnson W., Mellor P.I. Plasticity for mechanical engineers, D. Van Nostrand company 1962, 412 p.
6. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том.1. М., Машиностроение. 1969. 831 с.
7. Пинус Б.И., Безделев В.В., Гребенюк Г.И., Созонов П.С. Моделирование физической нелинейности стального стержня при одноосном нагружении с учетом истории деформирования // Изв. вузов. Строительство. 2013. №5.-С.122-128.
8. Khan A.S. Continuum theory of plasticity. John Wiley & Sons, inc., 1995. 421 p.
9. Ильюшин А.А. Пластичность. М., Гостехиздат. 1948.
10. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М., ГИТТЛ, 1956.
11. Койтер В. Общие теоремы упруго-пластических сред. М., ИЛ. 1961.
12. Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М., «Мир», 1964.
13. Прагер В. Проблемы теории пластичности. М., Физматгиз, 1958.
14. Соколовский В.В. Теория пластичности. М., Гостехиздат, 1950.

15. Томас Т. Пластическое течение и разрушение твердых тел. М., «Мир», 1964.
16. Фрейденталь А.Б., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
17. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956.
18. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966, 752 с.
19. Andrade E.N.C., On the viscous flow in metals, and allied phenomena.— «Proceedings of the Royal society», Ser A, Vol. 84, No A 567, 1910, p. 1—12.
20. Ю.Н. Работнов. Теория ползучести/ Механика в СССР за 50 лет. Том.3. Механика деформируемого твердого тела. М., 1972, С.119-154.
21. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. П, М., Машгиз, 1958, 974 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К- К. Лихарев и др.
22. Boltzman. Wissenschaftliche Abhandlungen, Iband (1865-1874). Leipzig, VerlagvonIohanAmbrosins, Barth, 1909
23. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием.— «Приклад, ная математика и механика», 1948, т. XII; в. I, с. 53—62. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966, 752 с
24. Бронский А.П. Явление последствия в твердом теле. – Прикладная математика и механика, 1941 т. V. в.1. с.31-56.
25. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М., ГИТТЛ, 1949, 252 с.
26. Москвитин В.В. Сопротивление вязко-упругих материалов. М., «Наука», 1972, 327 с
27. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., ГИТТЛ, 1952, 323 с.
28. Розовский М. И. Механика упруго-наследственных сред. В кн.: Итоги науки. Упругость и пластичность, 1965. М., ВИНТИ, 1967, с. 165—250.
29. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.

30. Soderberg C. R. The interpretation of creep tests for machine design.— «Transactions of the ASME», 1936, Vol. 58, No 8, p. 733—743

31. Работнов Ю. Н. Расчет" деталей машин на ползучесть.— «Известия АН СССР. Отд. техн. наук», 1948, № 6, с. 789—800

32. Whitney Ch.S. Plain and reinforced concrete arches. Journal of the American Concrete Institute, №7, 1932

33. Dishinger F. Elastische und plastische verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrucken. Bauingenieur, Heft 33/34, 1937

34. Буданов Н.А. Расчет железобетонных конструкций с учетом ползучести бетона. М., Стройиздат, 1949

35. Glanville W. H., Thomas F.G. Further investigations on the creep or flow of concrete under load. Building Research Technical. Paper, №21, London, 1939

36. Столяров Я.В. Введение в теорию железобетона, М., Стройиздат, 1941

37. Улицкий И.И. Определение напряжений от усадки бетонав элементах гидротехнических сооружений с учетом ползучести бетона. С. Науч. тр. Киевского ИСИ, №9, Гостехиздат УССР, 1951

38. Маслов Г.Н. Термическое напряженное состояние бетонных массивов при учете ползучести бетона. Известия НИИГ, т. 28, М., Госэнергоиздат, 1941

39. Александровский С.В. О методике исследований ползучести и влажностных деформаций бетона. Методика лабораторных исследований деформаций и прочности бетона, арматуры и железобетонных конструкций. Труды координационного совещания под ред. В.В. Макаричева. М., Госстройиздат, 1962

40. Васильев П.И. Связь между напряжениями и деформациями в бетоне при сжатии с учетом влияния времени. Известия ВНИИГ, т. 45, М., Госэнергоиздат, 1951

41. Гвоздев А.А. Температурно-усадочные напряжения в бетонных блоках и массивных сооружениях/ Сб.тр. МИСИ, №17, под. Ред. П.Л. Пастернака, М., Госстройиздат, 1957



42. Панарин. Н.Я. Некоторые вопросы расчета армированного и неармированного бетона с учетом ползучести. М., Госстройиздат, 1957

43. Прокопович И.Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. М., Госстройиздат, 1963. 260 с.

44. Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-матем. наук. т. XII, вып. 4, 1957

45. Манукян М.М. Определение напряжений в некоторых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменения модуля упруго-мгновенных деформаций. Известия АН Арм. ССР, т. VII, вып. 6, 1954

46. Ржаницин А.Р. Учет влажности и температуры в задачах о ползучести. // Исследования по механике и прикладной математике. Труды московского физико-технического института, вып 1. Оборонгиз, 1958

47. Прокопович И.Е., Зедгенидзе В.А. Прикладная теория ползучести.-М.: Стройиздат, 1980.-240 с

48. Гвоздев А.А., Галустов К.З., Яшин А.В. Об уточнении теории нелинейной ползучести бетона // Механика твердого тела. 1967. №6.

49. Галустов К.З., Гвоздев А.А. К вопросу о нелинейной теории ползучести бетона при одноосном сжатии. Изв. АН СССР. – Механика твердого тела, 1972, №1.

50. Галустов К.З. Нелинейная теория ползучести бетона и расчет железобетонных конструкций. - М.: Физматлит, 2006. 248 с.

51. Галустов К.З., Санжаровский Р.С. Современный опыт теории ползучести бетона. Юбилейный сборник, научные статьи к 80- летию НИИЖБ им. А.А. Гвоздева - М.: 2007

52. Галустов К.З. Принцип Вольтера и принцип Гвоздева-Галустова в теории ползучести бетона // Вестник ОН РААСН. Вып. №13. Т.1. 2009. С.88-96.

53. Галустов К.З. О влиянии ползучести бетона на изменение частот собственных колебаний многоэтажных (высотных) железобетонных сооружений // Вестник ОН РААСН. Вып. №14. Т.1. 2010. С.41-49

54. Галустов К.З. Учет фактора времени при проектировании железобетонных конструкций объектов энергетики. Промышленное и гражданское строительство. №1., 2013. С.23-25

55. Davenport N.C. Correlation of creep and relaxation properties of copper. «Journal of applied mechanics», 1938, Vol. 5, No 2, p. A—55...A—60

56. Качанов Л.М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960, 455 с.

57. Людвик П. Элементы технологической механики.— В кн.: Расчеты на прочность. [Сборник статей]. Вып. 15, М., «Машиностроение», 1971, с. 132—166.

58. Надаи А. Влияние времени на ползучесть.— В кн.: Теория пластичности. [Сборник статей]. М., Изд. иностр. лит., 1948, с. 405—426

59. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М., Стройиздат, 1974. 316 с.

60. В.З. Партон, Г.П. Черепанов/Механика в СССР за 50 лет. Т.3. Механика твердого деформируемого тела. М., Наука, 1972. С.365-467.

61. Катин Н.И., Исследование ползучести бетона при высоких напряжениях, в книге «Исследование свойств бетона в железобетонных конструкциях», Госстройиздат, 1956

62. Яшин А.В. Ползучесть бетона в раннем возрасте, в книге «Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций», вып. 4, Госстройиздат, 1959.

63. Арутюнян Н.Х., Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона – В кн.: Механика СССР за 50 лет. Т.3, М., Наука, 1972. – С. 155 – 202.

64. Александровский С.В., Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом ползучести. М., Стройиздат, 1973.

## СОДЕРЖАНИЕ

### Введение

1. Пластические деформации
2. Схематизация диаграмм деформирования
3. Первые, «простейшие», теории пластичности
4. Деформации ползучести
5. Модели механической теории ползучести
6. Технические модели теории ползучести
7. Теория упругой наследственности.
8. Нелинейно наследственная среда.
9. Теория старения
10. Наследственная теория старения.
11. Теория течения
12. Теория упрочнения
13. Модели механики разрушения

### Выводы