

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БЕТОНА

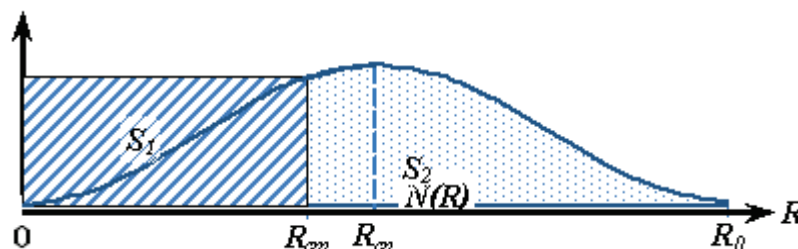
*Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.Носова*

### Введение

Возможен следующий подход к прочности бетона. Рассматривают тело нагруженное внешней нагрузкой. Тело обладает определенным количеством связей  $N(R)$  (например, распределение прочности по площадям). Под нагрузкой разрушаются слабые связи. За наибольшую нагрузку принимают такую, при которой произведение прочности наиболее слабой из оставшихся связей на число оставшихся связей будет наибольшим. При таком подходе среднее разрушающее напряжение  $R_{cm}$  по сечению образца будет меньше среднестатистического напряжения  $R_{cp}$  распределения прочности по сечению образца. Это условие работает даже при статистически однородных связях. В этом случае наиболее вероятное значение  $R_{cp}$ , соответствующее максимуму кривой распределения не может служить характеристикой прочности сечения. При этом расчетная зависимость имеет вид

$$R_{cm}N(R) = \int_{R_{cm}}^{R_0} N(R) dR. \quad (1)$$

Решение уравнения можно проводить графически рис.1. Из условия  $S_1 = S_2$ . Отмеченный подход в основном касается разрушения хрупких материалов.



**Рис.1. Распределение прочности по сечению образца**

Прочность материала всегда представляет собой некоторую случайную величину, так как, во-первых, точное расположение всех дефектов не известно заранее, а во-вторых, если бы это расположение и было известно, решение

соответствующей математической задачи было бы невозможно из-за её сложности. Вероятность же встречи наиболее крупного и опасного дефекта в большом образце больше – это объяснение лежит в основе объяснения масштабного эффекта в статистической теории.

При построении статистической теории идут двумя путями:

а) на основании опыта или интуиции выделяется один или несколько наиболее опасных дефектов, а остальные дефекты как бы равномерно «размазаны», считая свойства получившейся сплошной среды строго известными из макроэксперимента (длина, и может быть еще некоторые параметры, определяющие положение наиболее опасного дефекта, считаются случайными величинами с заданными функциями распределения);

б) все без исключения дефекты «размазываются» по объему, считая полученную усредненную среду сплошной и «бездефектной» (локальная прочность этой среды, а также напряжения считаются некоторыми случайными функциями координат с заданными функциями распределения в каждой точке тела, средние же значения напряжений и прочности определяются соответственно из макротемории и макроопыта); при этом подходе для получения окончательных выражений требуется еще ряд дополнительных допущений.

Первый подход ближе к теории трещин (подчеркивается физическая природа прочности). Второй метод более формален, он ближе к теориям прочности сопротивления материалов. Указанные подходы имеют различную область применения и играют различную роль на разных стадиях физического процесса разрушения.

Если характерный размер дефекта мал по сравнению с размером конструкции, то логичнее использовать второй подход, который и разрабатывается в большинстве исследований. Однако, согласно второму подходу для оценки функции распределения необходима представительная выборка, при этом прогноз относительно прочности одной конкретной конструкции оказывается уже вероятностным. Поэтому указанный подход

применим лишь к изделиям массового производства. Для уникальных конструкций может оказаться единственно возможным первый подход.

## **1. Статистические теории.**

Для количественного описания стохастических закономерностей предложен ряд статистических теорий. Основные принципы статистической теории прочности для микроскопически неоднородных хрупко разрушающихся тел были сформулированы на основе экспериментальных наблюдений А.П. Александровым и С.Н. Журковым (1933). Их можно описать следующими положениями. Распространение дефектов по объему хрупко разрушающейся среды равновероятно. Момент разрушения наиболее слабого тела совпадает с разрушением тела в целом. Прочность образца, вырезанного из такого тела, определяется наиболее опасным дефектом из всех присутствующих в его поверхностном слое.

Случайный характер распределения неоднородности свойств по объему среды проявляется в рассеивании хрупкой прочности образцов. При однородном напряженном состоянии нижняя граница рассеивания остается общей для образцов всех размеров и прочность самых больших образцов определяется прочностью наиболее слабых образцов малых размеров, если последние велики по сравнению с дефектами.

Понятие общей нижней границы рассеивания прочности и зависимость распределения случайных значений прочности тела от его размеров, введенные А.П. Александровым и С.Н. Журковым, явились основой статистической теории прочности В. Вейбула (1939), опирающейся на гипотезу «наиболее слабого звена». Эта теория в случае однородного растяжения приводит к степенной зависимости прочности от объема. Разрабатывалась также логарифмическая зависимость прочности от объема (Г.М. Бартенев и Ю.С. Зуев). Развивали статистическую теорию Н.П. Афанасьев, Н.Н. Афанасьев, В.В. Болотин, Р.Д. Вагапов, Ф.Ф. Витман, С.Д. Волков, А.Я. Воловик, М.Я. Гальперин, Н.Н. Давиденков, Н.Я. Махутов, И.А. Одинг, Н.Г. Плеханова, С.И.

Ратнер, Л.Г. Седралян, С.В. Серенсен, Г.А. Степанов, Г.В. Ужик, Я.Б. Фридман, Б.Б. Чечулин, Е.М, Шевандин, Н.П. Шапов, и др.

Статистическая теория прочности позволяет получить количественные оценки масштабного фактора [1]. Например, известное уравнение Вейбула:

$$R = A_2/V^{-n}, \quad (2)$$

где  $A$  и  $n$  – постоянные материала, учитывающие распределение дефектов и напряженное состояние.

Формула зависимости прочности от объема:

$$R \approx R_0 - \sqrt{A \ln V + B}, \quad (3)$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные,  $V$  – объем рабочей части образца.

На основе статической теории хрупкого разрушения материалов, которая применима к разрушению бетона, зависимость среднего предела прочности  $R$  от объема образца  $V$  можно представить и в виде зависимости:

$$R \approx R_0 \left[ a + b(V_0/V)^{1/\alpha} \right], \quad (4)$$

где  $R_0$  – предел прочности стандартного образца;  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  – эмпирические коэффициенты;  $V_0$  – объем стандартного образца.

По результатам опытных данных можно принять  $a = 0,45 - 0,7$ ;  $b = 0,4 - 0,6$ ;  $\alpha = 3$ , однако, возможны более значительные колебания этих коэффициентов. Надо отметить, что при испытании почти невозможно разделить влияние масштабного фактора, конструкции пресса, статических и технологических факторов, поэтому приведенные выше коэффициенты в известной мере отражают влияние различных факторов.

Исходя из статистической физики получено вероятное время нахождения атома в потенциальной яме до преодоления энергетического барьера:

$$\tau = \tau_0 e^{W_0/(k_0 T)}, \quad (5)$$

где  $\tau_0$  - время нахождения атома в данной точке, это время для твердых тел примерно оценивается  $\sim 10^{-13}$  с. При отсутствии барьера -  $W_0 = 0$ , величина потенциального барьера оценивается  $(0,6...2,4) \cdot 10^{-19}$  Дж. При комнатной температуре  $k_0 T = 4 \cdot 10^{-21}$  Дж.

Долговечность материала определяется временем его нахождения в определенном состоянии и постепенным накоплением в нем микро разрушений. Если в момент времени  $t_0$  к материалу с прочностью  $R_0$  передается нагрузка, создающая напряжение  $\sigma_0$ , то в течение времени  $t$  часть связей  $\Delta N$  окажется разрушенной и прочность материала уменьшится до  $R_t$ :

$$R_t/R_0 = 1 - \Delta N/N_0. \quad (6)$$

За время  $t$  можно ожидать  $t/\tau = \Delta N$  элементарных переходов. При элементарном переходе от атома к атому на расстояние  $r_0$  совершается работа  $Fr_0/2$  или, учитывая, что на единицу площади приходится  $1/r_0^2$  атомов, получаем, что энергетический барьер уменьшается на эту работу и тогда из (5) и (6) получается:

$$\frac{R_t}{R_0} = 1 - \frac{t}{\tau_0 N_0} e^{\frac{W_0 - \frac{1}{2} r_0^3 \sigma}{k_0 T}}. \quad (7)$$

Из последней зависимости при  $R_t=0$  и обозначив  $\tau_0 N_0 = \tau_0'$  получается известное уравнение Н.С. Журкова [2].

Исследования, проведенные С.Н. Журковым с сотрудниками [3] показали, что связь между напряжениями и долговечностью может быть выражена зависимостью

$$\tau = A e^{-\lambda \sigma}, \quad (8)$$

где  $A$  и  $\lambda$  – некоторые константы, зависящие от температуры.

В дальнейшем кинетическая концепция, основанная на идеях Я.И. Френкеля, где определяющим фактором при пластической деформации считаются тепловые флуктуации, была распространена на разрушение всех твердых тел. На основе эмпирических исследований долговечности твердых тел под нагрузкой С.Н. Журков получил следующую температурно-временную зависимость:

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{U_0 - \gamma_* \sigma}{kT}\right). \quad (9)$$

Здесь  $\tau_0$  - константа, близкая к характерным (дебаевским) тепловым колебаниям атомов (для твердых тел  $\tau_0 \approx 10^{-11} \dots 10^{-13}$  с),  $k = 1,37 \times 10^{-16}$  - универсальная

газовая постоянная Больцмана,  $U_0 - \gamma_{\square} \sigma$  - начальная энергия активации,  $U_0$  - энергия активации процессов разрушения, кДж·моль близкая к энергии сублимации для металлов и к энергии химических связей для полимеров (активационный барьер процесса разрушения, определяемый энергией связи),  $\gamma_{\square}$  - поправочный коэффициент, структурно-чувствительная постоянная материала, показывающая изменение энергии активации процесса разрушения от приложенной нагрузки, кДж·моль·МПа (коэффициент, характеризующий падение барьера с напряжением (возможно связанный с дефектами)).

При постоянной температуре формула принимает вид

$$\ln \tau = A - a \cdot \sigma . \quad (10)$$

Можно отметить, что исходная формула имеет вид закона Аррениуса, где константа скорости хим. процесса записана формулой

$$k = k_0 e^{\left[ -\frac{U_0}{RT(T=273+T^0C)} \right]} . \quad (11)$$

Кинетическая теория С.Н. Журкова имеет свои ограничения. Так согласно ей материал обладает ограниченной долговечностью при нагрузках близких к нулевым, не конкретизируется физический смысл начальной энергии активации  $U_0$ . Наибольший разброс экспериментальных данных наблюдался при очень длинных и очень коротких временах разрушения.

Испытания, проведенные при высоком вакууме (Г.М. Бартенев, 1955), показали, что внешняя среда не является первостепенной причиной влияния на временную зависимость, за исключением отдельных частных случаев сильных поверхностно-активных сред.

Г.М. Бартенев и Ю.С. Зуев [4] предложили формулу определения частоты флуктуаций приводящих к разрыву связей и росту трещины:

$$\nu_I = \nu \cdot e^{\frac{\omega \cdot n \cdot \sigma' - U_0}{K \cdot T}} , \quad (12)$$

где  $\omega$  - элементарный активационный объем, где происходит разрыв связи;  $\sigma'$  - истинное напряжение в вершине трещины;  $n$  - коэффициент перенапряжений.

Подобная зависимость получена Г.И. Баренблаттом [5].

Уравнения, аналогичные предложенному С.Н. Журкову используются для описания накопления микротрещин [6]. Так применительно к бетону зависимость из кинетической теории С.Н.Журкова, может быть представлена в виде предложенном К.И. Кузнецовой

$$dl/dt = B_0 e^{a_0 \sigma / R}, \quad (13)$$

где  $B_0$ - величина, отражающая склонность материала к трещинообразованию, м/с;  $a_0$ - безразмерная величина, отражающая интенсивность трещинообразования.

## 2. Оценка продолжительности разрушения.

В 1968 г. Г.П. Черепанов на основе концепции Г. Нейбера и опытных данных по длительной прочности получил следующее уравнение для скорости роста трещин  $dl/dt$  в зависимости от коэффициента интенсивности напряжений  $K$ :

$$dl/dt = A \exp(\alpha K / T). \quad (14)$$

Здесь  $\alpha$  и  $A$  – некоторые постоянные,  $T$  – температура.

Для оценки времени разрушения при переменном во времени нагружении применяется правило Дж. Бейли суммирования повреждений

$$\int_0^{\tau'} \frac{dt}{\tau(\sigma)} = 1. \quad (15)$$

Здесь  $\tau'$ - долговечность образца при любом заданном режиме испытания,  $\tau(\sigma) = \tau(\sigma(t), T)$ - долговечность, которая находится по известной временной зависимости, например, из (9).

Наиболее удачная аппроксимация экспериментальных зависимостей для стекол ( Г.М.Бартенев, Б.Я. Пинес, и А.Ф. Сиренко, А. Холланд и В. Тернер) имеет степенной вид:

$$\tau = B \sigma^{-b}. \quad (16)$$

Здесь  $\tau$  и  $\sigma$  – значения долговечности и растягивающих напряжений, а  $B$  и  $b$  - некоторые константы.

Для резин Г.М. Бартенев и Ю.С. Зуев предлагают следующую температурно-временную зависимость

$$\tau = C \sigma^{-b} \exp(U/kT). \quad (17)$$

Итак, согласно кинетической концепции прочности органических строительных материалов их механическое разрушение есть термомеханическая деструкция лишь ускоренная механическим полем.

Формула С.Н. Журкова справедлива только при постоянных значениях входящих в неё параметров. В общем случае, когда напряжения, температура и структура материала изменяются, следует переходить к скорости разрушения [7]

$$\dot{\omega} = v_0 \exp\left(-\frac{U_0 - \gamma(t, \sigma, T)\sigma(t)}{kT(t)}\right), \quad (18)$$

где  $t$  – текущее время,  $v_0 = 1/\tau_0$  - частота попыток преодолеть потенциальный энергетический барьер.

Макроразрушение материала как событие определяется интегралом скорости разрушения по времени:

$$\int_0^{\tau} \dot{\omega}(t, \sigma, T) dt = 1. \quad (19)$$

Здесь условная величина повреждения  $\omega = 1$  соответствует пороговой концентрации несплошностей, вызывающей их объединение. Отсюда следует, что материал можно разрушить разными по характеру силовыми воздействиями.

Исследования В.П. Ярцева [8,9,11] показали, что опытные данные времени до разрушения ( $\tau$ ) от напряжения ( $\sigma$ ) и температуры ( $T$ ) описываются семейством кривых, сходящихся в полюс:

$$\tau = \tau_m \exp\left[\frac{U_0 - \gamma\sigma}{RT} \left(1 - \frac{T}{T_m}\right)\right], \quad (20)$$

где  $T_m$  - предельная температура существования твердого тела (этим приведенная формула, отличается от формулы С.Н. Журкова [10]).

Из последнего уравнения можно выразить прочность:

$$\sigma = \frac{1}{\gamma} \left[ U_0 - \frac{2,3RT}{1 - T/T_m} \log \frac{\tau}{\tau_m} \right]. \quad (21)$$

Переход от одного вида нагрузки к другому отражается только на силовом факторе  $\gamma$ , который состоит из изменения чувствительности материала к изменению или формы (девиатор  $d\gamma_d$ ) или объема (шаровой тензор  $s\gamma_s$ ). Безразмерные величины  $s$  и  $d$  характеризуют данный вид нагрузки и одинаковы



для любого предельного состояния и любого материала, поэтому могут быть рассчитаны для простых случаев.

Используя кинетическую концепцию долговечности в работе [11] рассчитывали долговечность железобетонных балок, используя зависимость В.П. Ярцева. В результате испытаний получены значения констант уравнения, не имеющие физического смысла, но позволяющие рассчитывать долговечность образцов.

Согласно статистической теории прочности разрушение происходит путем накопления микро разрушений элементарных объемов при этом нарушается структура бетона и образуются импульсы упругих волн напряжений – акустическая эмиссия [13].

Запишем среднее напряжение при одноосном нагружении

$$\bar{\sigma}_b = \int_0^{\alpha_m} \sigma \rho(\alpha) d\alpha, \quad (22)$$

где  $\rho(\alpha)$  - функция распределения элементарных связей по деформативности  $\alpha_i$ ,  $\sigma$  – напряжения в  $i$ -той связи:

$$\text{при пластическом течении} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = E_1 \varepsilon \text{ при } \varepsilon \leq \alpha \\ \sigma = E_1 \alpha \text{ при } \varepsilon > \alpha \end{array} \right\};$$

$$\text{при хрупком разрушении} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = E_1 \varepsilon \text{ при } \varepsilon \leq \alpha \\ \sigma = 0 \text{ при } \varepsilon > \alpha \end{array} \right\},$$

где  $\varepsilon$  - текущая деформация,  $E_1$  - модуль упругости связи.

Среднее напряжение при упруго-хрупком деформировании

$$\sigma_b = E_1 \varepsilon \left\{ 1 - \int_0^{\varepsilon} \rho(\alpha) d\alpha \right\}. \quad (23)$$

Если принять распределение элементарных структурных связей в бетоне:

$$\rho(\alpha) = \frac{m-1}{\alpha_R^{m-1}} \alpha_i^{m-2}, \quad (24)$$

где  $\alpha_i$ -предельная деформация связи,  $\alpha_R$ -предельная деформация из всех связей,  $m = \varepsilon_R / \varepsilon_{pl}$ -параметр распределения, отражает неоднородность внутренних свойств материала.

$$\text{Получается} \quad \sigma_b = E_1 \varepsilon \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^{m-1}}{m \varepsilon_R^{m-1}} \right\} \text{ и } R_b = E_1 \varepsilon_R \left\{ 1 - \frac{1}{m} \right\}. \quad (25)$$

Величина  $\int_0^\varepsilon \rho(\alpha) d\alpha$  характеризует относительное число разрушенных структурных связей.

### 3. Статистические модели при проектировании поведения бетона

Е.Н. Львовский [13] предлагает использовать статистические модели при проектировании поведения бетона. Выбрана многофакторная модель ползучести бетона в виде произведения функций

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)\theta(t - \tau), \quad (26)$$

где  $\varphi(\tau) = C_0\theta(\tau)$ ;  $C_0 = b_0 \prod_{i=1}^p A_i^{b_i}$ ;  $\theta(\tau) = e^{-\alpha\tau}$ ;  $\theta(t - \tau) = \langle 1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \rangle$ ;  $i$  - число обрабатываемых факторов:  $i = \overline{1, p}$ ;  $A_i$  - уровни факторов;  $b_i$  - коэффициенты регрессии.

Полученная в результате обработки матрицы исходных данных модель:

$$C(t, \tau) = 0,218[(3)^{-0,55} \cdot (\text{Ц})^{-0,71} \cdot (W)^{-1,31} \cdot (M)^{-0,28} \cdot (B/\text{Ц})^{-2,40}] \times e^{-\alpha t} \times \langle 1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \rangle.$$

В последней зависимости:  $З$  - масса заполнителя варьируемая на семи уровнях 1500...2100 кг/м<sup>3</sup>;  $\text{Ц}$  - масса цемента варьируемая на семи уровнях 275...425 кг/м<sup>3</sup>;  $W$  - влажность среды 50,60,70,80,90;  $M$  - масштабный фактор 10,12,14,16,18,20;  $B/\text{Ц}$  - 40...70;  $\tau = 7,14,28,40,60,90,120$ . Полученная функция протабулирована для всевозможных сочетаний уровней факторов.

### 4. Статистические и структурные модели

Холмянский М.М. [14] считает, что прогноз разрушения бетона должен основываться как для неоднородного не сплошного материала. Несплошность и неоднородность бетона придают этому материалу отрывное строение и локальность сопротивления, что выражается в независимости работы зерен бетона, выделенных трещинами от смежных зерен. Полагает физически необоснованным применение механики разрушения для расчета бетонных элементов с начальными трещинами [15]. При увеличении размера, в котором

чередуются хрупкий и пластический характер разрушения модель бетона представляет по рис.2.



**Рис.2. Модель бетона М.М. Холмянского**

Скоробогатов С.М. [28] описывает бетон как систему с набором связей прочностью  $R_i$  каждая из которых имеет вероятность  $P_i$ . В момент разрушения неопределенность и энтропия объекта равны нулю. Величина информации и энтропии определяется по формуле К. Шеннона\* [29]:

$$H = H = - \sum_{i=1}^m P_i \log_2 P_i, \quad (27)$$

где  $H$  - величина неопределенности (энтропии) события;  $P_i$ - вероятность наступления исхода данного события;  $m$  - число возможных исходов данного события  $H = - \sum_{i=1}^m P_i \log_2 P_i$ .

Все элементы системы составляют ансамбль  $\sum_{i=1}^m P_i = 1$ . Тогда меру неопределенности для бетона можно записать в виде:

$$H_i = - \log_2 P_i = - \ln P_i / \ln 2 = - 1,443 \ln P_i. \quad (28)$$

Полученная кривая по форме и смыслу близка к кривой потенциала (см ).

\*При одном источнике информации общее количество сообщений равно

$$L = m^n,$$

где  $m$  - основание системы счисления;  $n$  - число разрядов в числе или элементов в коде.

Для  $k$  количества источников  $L = L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_k$  или переходя на более удобную логарифмическую форму  $I = \log L = n_1 \log m_1 + n_2 \log m_2 + \dots \dots n_k \log m_k$ . При переходе на вероятность - единица измерения информации и энтропии в двоичной системе:  $\log_2 2 = 1$  бит; в десятичной системе:  $\log_{10} 10 = 1$  дит; при использовании натуральных логарифмов:  $\log_e e = 1$  нит.

Предвидимое состояние системы в процессах управления предлагается записывать на основе выражения:

$$y_b(t) = y_n(t_0) + \int_{t_0}^T y_6(t) dt,$$

где  $y_n$ - переменная, определяющая начальное состояние системы;  $y_6$ - значение переменной для предвидимого состояния;  $\dot{y}_6$ - скоростная характеристика, определяющая развитие системы,  $t_0$ - начальный момент времени;  $T$  - конечное время рассматриваемого периода

Г.Т. Тарабрин [16.] рассматривал модели работы бетона как дискретную модель растянутого стержня, состоящего из отдельных не скрепленных слоев одинаковой длины. Каждый слой представлял собой идеальный упругопластический материал с упрочнением и хрупким разрушением (три отрезка – два наклонных и третий вертикальный). Пределы упругости у всех слоев были одинаковы, разгрузка производилась параллельна нагружению. Отличие моделей состояло в коэффициенте упрочнения  $\alpha$ . В результате получена ломанная линия из двух наклонных линий до предела прочности и далее ломанная линия (по количеству слоев) разрушения – ниспадающая. Континуальная модель строилась аналогично, разбивая модель на  $n$  волокон. Вводили функцию поврежденности  $w(\varepsilon)=1- F(\sigma)/F_0$ . В этом случае до предела пропорциональности выполняется закон Гука. Далее при нагружении работает зависимость:

$$\sigma=[\varepsilon-(\varepsilon-\varepsilon_0)(1-A_0)]E_0, \text{ где } E_0 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_n} e(\xi) \omega'(\xi) d\xi, A_0 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_n} \alpha(\xi) e(\xi) \omega'(\xi) d\xi / E_0.$$

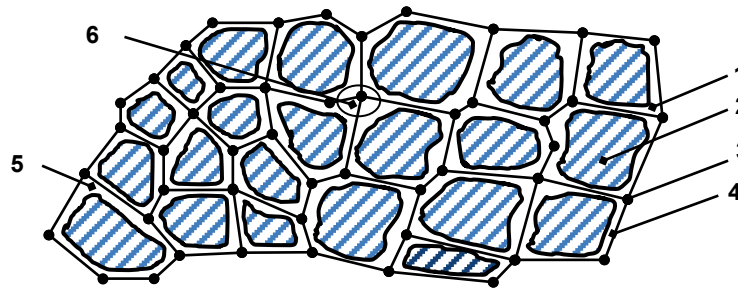
После разрушения первого волокна на ниспадающей ветви нижние пределы интегрирования принимаются переменными. Наклон линий разгрузки при этом постепенно уменьшается до нуля. Сопоставление с экспериментом [17,18,19] показало удовлетворительные результаты.

В работе [20] бетон представляется совокупностью зерен заполнителя, являющихся центрами полиэдров Вороного [21]. Во время разрушения раскрытие трещин происходит по граням полиэдров (рис.3) в соответствии с статистической моделью В.В. Болотина [22].

Модель структуры показана на рис.3. Исходные характеристики модели:  $q_*$ - прочность цементного камня;  $d$  - средний межзерновой диаметр;  $l$ - длина связи;  $k$ - коэффициент, учитывающий технологические факторы;  $R_s(l) = \exp(klq_*/d)$ - прочность связи;  $\bar{l} = 17,5/40,61^3\sqrt{\beta}$ - средняя длина ребра

(связи), определяемая согласно [1];  $\beta$  - плотность центров полиэдров Вороного (количество зерен крупного и мелкого заполнителя в определенном объеме);  $n = 40,61\beta/3$  - число связей в модели, исключая общие для соседних;  $f(l) = \frac{\pi}{2l^2} l \exp\left(-\frac{\pi}{4l^2} l^2\right)$  - плотность распределения связей по их длине, определенная по формуле Рэлея. Исходя из модели получена прочность бетона, при кратковременном нагружении и ненарушенных связях (теоретическая прочность)

$$R_{b0} = \frac{\pi k n q_*}{2 d l^2} \int_0^l l \exp\left(\frac{k l q_*}{d} - \frac{\pi l^2}{4 l^2}\right) dl = \frac{k n q_*}{d} \int_0^l \exp\left(\frac{k l q_*}{d}\right) f(l) dl. \quad (29)$$



**Рис. 3. Модель структуры тяжелого бетона**

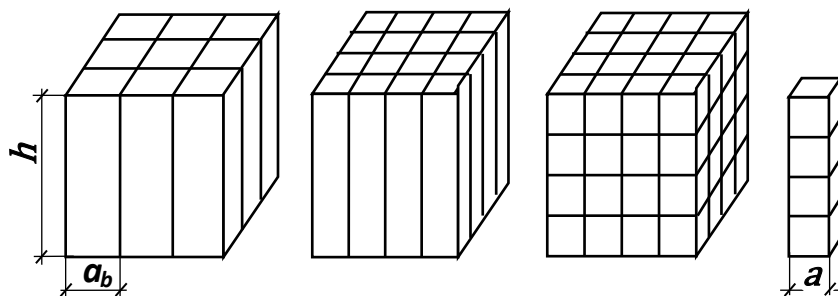
1-полиэдр Вороного; 2- зерно заполнителя; 3 – Вершина полиэдра; 4 – ребро полиэдра; 5 - цементный камень; 6- элементарный объем цементного камня.

Работа модели происходит следующим образом. Прикладывают нагрузку на единицу площади ( $\sigma_0$ ), считая её равномерно распределенной по всем связям  $\sigma_0/n_0$ . Часть связей длиной меньше некоторого предельного значения  $l_0$  ( $l \leq l_0$ ) разрушается. Число связей уменьшается до  $n_1 = n_0 - m$ . Происходит раскрытие трещин по граням полиэдров с раскрытием площади поверхности трещин  $S(l_0) = 2\sqrt{3} \left( n \int_0^{l_0} l f(l) dl \right)^2$ . При этом происходит уменьшение упругой энергии с  $U_0 = \sigma_0^2/2E_{цк}$  до  $U_1 = \sigma_1^2/2E_{цк}$ . Уменьшение упругой энергии складывается из освободившейся энергии при разрушении связей  $\Delta U_b = -U_0 S(l_0)$  и энергии, приходящейся на единицу площади при разрыве связей  $W = \sigma_0(l_0) = n \int_0^{l_0} l f(l) dl$ . Получается

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta U_b + W = \frac{-\sigma_0^2}{\sqrt{3} E_{цк}} \left( n \int_0^{l_0} l f(l) dl \right)^2 + n \int_0^{l_0} l f(l) dl = W \left( 1 - \frac{R_{b0}^2}{\sqrt{3} E_{цк}} W \right).$$

Прочность, бетона снижается до  $R_1 = \sqrt{(\sigma_0^2 - 2\Delta E_{цк})}$ . На следующем этапе приложенное напряжение распределяют на  $n_1$  связей и продолжают расчет до стабилизации  $R_1$ . Напряжение повышают и продолжают итерационный процесс. Предельные напряжения, при которых бетон не разрушится, принимают за его реальную прочность.

Ю.В. Краснощеков [24] рассматривал кубический образец как систему (большой образец является системой, меньший – элементом системы) и расположение в ней отдельных элементов построены переходные коэффициенты, рис.4.



**Рис.4. Системные модели прочности кубов и призмы**

Прочность куба в виде системы параллельно соединенных призм выражается вероятностной моделью  $\bar{R} = \bar{R}_b \left(1 + \frac{t_{n-1}v}{\sqrt{n}}\right)$ ,  $(k = 1 + \frac{t_{n-1}v}{\sqrt{n}})$ .

Прочность призмной системы в виде последовательно соединенных кубов наступает в результате отказа наиболее слабого звена  $\bar{R}_b = \bar{R}_a \left(1 - \frac{t_{n-1}v}{\sqrt{h/a}}\right)$ ,

$(\bar{k}_b = 1 - \frac{t_{n-1}v}{\sqrt{h/a}})$ . В таблице приведены расчетные значения коэффициентов, определенные с доверительной вероятностью 0,95. Значения  $t_{n-1}$ (коэффициент Стьюдента, учитывающий ошибку при оценке ограниченного числа испытаний) получились следующие: для  $n = 4$  ( $h/a = \sqrt{n}$ )  $\rightarrow t_{n-1} = 3,182$ ; для  $n = 9 \rightarrow t_{n-1} = 2,306$ ; для  $n = 16 \rightarrow t_{n-1} = 2,12$ .

Согласно модели, при  $v = 0,2$  получается: если исходный куб размером 2,5 см, то относительная прочность куба размером 10 см - 1,12, прочность призмы 2,5x2,5x10 см - 0,68; прочность куба 10x10 см при единичной прочности

призмы 2,5x2,5x10 см – 1,32. При проведении испытаний необходимо уточнять коэффициент вариации прочности бетона.

h/a	Коэффициенты	$\nu$					
		0,05	0,08	0,1	0,135	0,15	0,2
3	$k$	0,88	0,8	0,75	0,66	0,63	0,50
	$\overline{k_b}$	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,15
	$\overline{k_b k}$	0,92	0,85	0,81	0,73	0,70	0,58
4	$k$	0,92	0,87	0,84	0,79	0,76	0,68
	$\overline{k_b}$	1,03	1,04	1,05	1,07	1,08	1,11
	$\overline{k_b k}$	0,95	0,91	0,88	0,85	0,82	0,75

При более сложных статистических построениях прочностные и деформационные свойства бетона как композиционного материала определяются не только механическими свойствами его составляющих, но и его структурой и сцеплением составляющих друг с другом. Цементный камень, по своей сути сам является композитом

Н.И. Макридин, Г.Г. Болдырев, И.Х. Идрисов, предлагают макромеханическую модель бетона, в которой для описания поведения каждого компонента применяется своя модель (определяющие уравнения). Параметры моделей определяются экспериментально для различных цементных композитов и заполнителей. Поведение композита как единого целого определяется суммой поведения его компонент, используя теорию смесей в общем, определяющем уравнении для целого композита.

### 5. Теория смесей

Теория смесей была предложена Trusdel & Tourpin (1960) и развита в работах Ortiz & Popov [25], Oller at all [26]. Теория базируется на локальной механике и основана из следующих предположений:

- а) каждый бесконечно малый объем заполнен конечным числом компонент;
- б) каждый компонент оказывает влияние пропорционально своему объему;
- в) все компоненты подвержены одной деформации (уравнение совместности);
- г) объем каждого компонента намного меньше полного объема композита.

Так для композитного материала приращения напряжений определяются

$$d\sigma_{ij} = \sum_{c=1}^m k(d\sigma_{ij})_c = \sum_{c=1}^m k(D_{ijkl})_c (d\varepsilon_{kl})_c, \quad (30)$$

где  $k_c = dV_c/dV$  – доля объема одной составляющей в единице объема композита, поэтому должно удовлетворяться условие

$$\sum_{c=1}^m k = 1. \quad (31)$$

Величина  $dV_c$  определяется составом композита.

### **Выводы**

Надо отметить, что чисто статистические модели не всегда точно описывают результаты натуральных испытаний. Так результаты испытаний, на которые ссылается Р. Лермит [27] показывают рост прочности бетона с увеличением ребра кубика с 10 до 14...20 см с 198 кг/см<sup>2</sup> до 212 кг/см<sup>2</sup> и уменьшение до 193 кг/см<sup>2</sup> при увеличении ребра до 30 см. Его простые рассуждения говорят о том, что с увеличением размера кубика разброс прочностей должен уменьшиться, а прочность возрасти. Но он отмечает и увеличение влияния размера стенки с уменьшением объема образца.

### **Литература**

1. Френкель Я.И. Введение в физику металлов. Физматгиз, 1958
2. Журков Н.С., Томашевский Э.Е.//Некоторые проблемы прочности твердого тела. Изд-во АН СССР, 1955
3. Журков С.Н. Проблема прочности твердых тел// Вестник АН СССР.- 1957.№11.-С.78-82
4. Бартенев Г.М., Зуев Ю.С. Прочность и разрушение высокоэластичных материалов.- М.: Химия, 1964.-387 с.
5. Баренблатт Г.И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении// ПМТФ.1961. №4, С. 122-129
6. Бобрышев А.Н. Новая кинетическая модель// 2-е академические чтения. Казань: КГАСА. 1996. С.27-28



7. Петров М.Г. Особенности характеристик прочности и долговечности стеклопластиковой арматуры, применяемой в строительных конструкциях. // Изв. Вузов. Строительство. №5.2005.- С.4-8

8. Ярцев В.П. Физико-технические основы работоспособности органических материалов в деталях и конструкциях: Автореф. дисс. д-ра. техн. наук. – Воронеж, 1998. -12 с.

9. Ярцев В.П. Физическая механика в строительном материаловедении.// Композиционные строительные материалы. Теория и практика. Сб.науч. тр. Междунар. науч.-техн. конф. Ч.II.- Пенза: Приволж.Дом.знаний, 2000.С.165-167

10. В.Р. Регель.,Слущкер А.И., Томашевский З.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. – М.: Наука, 1974. -560 с.

11. Ярцев В.П., Воронков А.Г., Жариков А.В. Влияние состава на долговечность мелкозернистых бетонов. Бетон и железобетон. 2006.-№4. С.27-28.

12. Калашников В.А., Еременко В.П. Зависимость между напряженно-деформированным состоянием бетона и акустической эмиссией. Бетон и железобетон. 1978.№4 С.41-42

13. Львовский Е.Н. Статистическое моделирование деформаций ползучести на ЭВМ. Бетон и железобетон. №11.1992.с.18-19.

14. Холмянский М.М. Несущая способность бетона и место линейной механики разрушения в ее прогнозе. Бетон и железобетон. №7. 1984 с.38-40

15. Холмянский М.М. Работа бетонной балки с одиночными трещинами или разрезами. Бетон и железобетон. 2003.-№1. С20-24.

16. Тарабрин Г.Т. Редуктивная модель процесса растяжения хрупкого материала и вопросы расчета с полной диаграммой нагружения. Бетон и железобетон. 1994.-№4.С.22-26

17. Nanigawa Y. Hatanaka S., Stress-Strain Relations of Steel Fiber Reinforced Concrete under Repeated Compressive Load. Cement and Concrete Research 13 (1983) 801-808.

18. Grootenboer H.J., Leijten S.F.C.H. and Blauwendraad J., Numerical Models for Reinforced Concrete Structures in Plane Stress. Heron 26(1981) 1-83.

19. Tassios T.P. and Yannopoulos H.J. Analytical Studies of Reinforced Concrete Members under Cyclic Loading Based on Bond Stress-Slip Relationships, ACI J.78(1981) 206-216.

20. Лишанский Б.А., Грушко И.М., Лазуренко А.В. Использование концепций механики разрушения при структурно-имитационном моделировании тяжелого бетона. Ихв. Вузов. Строительство. 1992. №5,6.- с. 78-83

21. Вороной Г.Ф. Исследования о примитивных параллелоэдрах. Собр. соч. –Киев: АН УССР. 1952.- Т.11.-С.239-358

22. Болотин В.В. Стохастические модели разрушения: проверка гипотез и оценка параметров// Разрушение композитных материалов: Рига, Знание, 1979.- С.49-56. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике.-М.: Стройиздат, 1965.-279 с.

23. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности.- М.: Наука, 1983.-358 с.

24. Краснощеков Ю.В. Системные модели прочности бетонных образцов. Бетон и железобетон. №5.1996. с.19-21

25. Ortiz M., Popov E.P. A physical model for the inelasticity of concrete. Proc. Roy. Soc. Lond. A 383, 1982, pp. 101-125.

26. Oller S., Onate E., Miquel J., Botello S. A plastic damage constitutive model for composite materials. Int. J. Solids Structures. Vol. 33, No. 17, 1996, pp. 2501-2518.

27. Лермит Р. Проблемы технологии бетона: Пер с фр.-М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 296 с

28. Скоробогатов С.М. Принцип информационной энтропии в механике разрушения инженерных сооружений и горных пластов.- Екатеринбург: УрГУПС.-420 с.

29. Лоскутов В.И. Основы современной техники управления. М., «Экономика», 1973. 311 с.

## **СОДЕРЖАНИЕ**

Введение

1. Статистические теории

2. Оценка продолжительности разрушения

3. Статистические модели при проектировании поведения бетона

4. Статистические и структурные модели

5. Теория смесей

Выводы